АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

6068—6766

*

№ 8 1957

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Б. С. Балакшин, Е. Е. Захаров, С. М. Лисичкин (зам. председателя), В. Ю. Ломоносов, А. И. Михайлов (председатель), С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 6
Основания математики и математическая логика 7
Теория чисел 9
Алгебра 13
Многочлены и линейная алгебра 13
Группы 14
Поля, кольца и структуры 17
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 22
Теория функций действительного переменного 32
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями 39
Теория функций комплексного переменного 42
Дифференциальные уравнения 57
Обыкновенные дифференциальные уравнения 57
Уравнения в частных производных . . 68
Приложения к физике, технике и естественным наукам 71
Интегральные уравнения . . . . . —
Приложения интегральных уравнений . —
Вариационное исчисление 75
Анализ (другие вопросы) 77
Числовые ряды 81
Специальные функции 83
Интегральные преобразования и операционное исчисление 85
Приложения общих методов математического анализа . . . . . —
Функциональный анализ 86
Теория вероятностей 97
Математическая статистика 99
Теория игр и математическая экономика 102
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 104
Геометрия 104
Элементарная геометрия 105
Приложения геометрии 106
Проективная и начертательная геометрия 107
Алгебраическая геометрия 108
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 110
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 113
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 118
Метрические методы в геометрии 121
Геометрия выпуклых многообразий . . . 124
Численные и графические методы 126
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 135
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 143
Новые книги, поступившие в редакцию . . . —
Авторский указатель 145

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

Рефераты 6068—6766 **№ 8** **Август 1957 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

6068. 3-й Всесоюзный съезд математиков в СССР. Гуань Чжао-чжи. (參加第三屆全蘇聯數學大會的一些見聞。關肇直), 科學通報, Кэсюэ тунбао, 1956, № 9, 86—89 (кит.)

6069. Десять лет развития математики в свободной Чехословакии. Я р н и к (Deset let matematiky v osvobozeném Československu. J a r n í k V o j t ě c h), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 3, 261—273 (чешск.)

Автор рассматривает развитие математики в Чехословакии после освобождения от гитлеровской оккупации. Упоминается о реформе высшего образования. Описывается развитие Института математики Чехословацкой академии наук с 1952 г. (ранее существовали: Математический институт при Чешской академии наук и искусств (1947—1950), Центральный математический институт при Комитете науки и технического развития (1950—1952)) и его перспективный план работы.

Автор также описывает историю Общества чехословацких математиков и физиков, объединяющего математиков и физиков, и рассматривает развитие математики в свободной Словакии. Далее рассматривается деятельность математических отделений Научно-исследовательского института теплотехники при Министерстве машиностроения и дается обзор научно-исследовательской работы в свободной Чехословакии по отдельным областям математики.

Показано значение математических олимпиад для воспитания новых математических кадров; дается перечень периодических математических изданий и список издательств математической литературы.

Рассматриваются международные связи чехословацких математиков после освобождения; дан перечень математических съездов и конференций, состоявшихся в течение истекших десяти лет.

Общим выводом статьи является заключение, что требования к математической науке в стране, строящей социализм, совершенно иные, нежели в капиталистическом государстве, и что народно-демократическое государство обеспечивает математикам небывалые возможности. Věra Bayerová

6070. Память человека и хранение информации. М и л л е р (Human memory and the storage of information. M i l l e r G e o r g e A.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, **2**, № 3, 129—137 (англ.)

Исследование различных сторон способности человека к запоминанию: количество запоминаемой информации, скорость запоминания, скорость передачи информации и т. п. и зависимости их от способа подачи информации. Н. П. Жидков

6071. Информация и память. М и л л е р (Information and memory. M i l l e r G e o r g e A.), Scient. Amer. 1956, **195**, № 2, 42—46 (англ.)

Краткое изложение тех же вопросов, что и в другой статье автора (реф. 6070).

6072. Роль математики в исследовании операций. В а ж о н ь и (The role of mathematics in operations research. V a z s o n y i A n d r e w), J. Industr. Engng, 1956, **7**, № 5, 201—209 (англ.)

Приведены элементарные примеры, иллюстрирующие возможность применения математических методов при решении некоторых задач планирования производства. Высказан ряд доводов о пользе математических методов в вопросах управления производством. Н. П. Жидков

6073. Исследование операций и приложения. Г и л ь б о (La recherche opérationnelle et ses applications. G u i l b a u d G. Th.), Rev. statist. appliquée, 1956, **4**, № 3, 7—18. Discuss., 19—20 (франц.)

Доклад о предмете исследования операций и дискуссия по этому вопросу. Н. П. Жидков

6074. Что может нам дать кибернетика? Т е р н ё (Que peut nous apporter la cybernétique? T e r n e u R a y m o n d), Organis. scient., 1956, **30**, № 4, 103—108 (франц.)

Лекция, прочитанная в научном Бельгийском комитете в Брюсселе 16 ноября 1955 г. Популярно излагаются некоторые понятия кибернетики. Более подробно рассматривается обратная связь как в различных механизмах, так и в живом организме. Затрагиваются вопросы, связанные с историей возникновения кибернетики. Л. Е. Майстров

6075. Биология и математика. И в л е в В. С., Вопр. философии, 1956, № 6, 76—79

Обсуждение вопроса, выдвинутого в статье А. Верцинского (Перевод статьи с польского, см. РЖМат, 1956, 6302). Автор приводит ряд соображений в подтверждение с нашей точки зрения бесспорного положения возможности и полезности применения математики в биологии. Л. Е. Майстров

6076. Чем являются x и y? М е н г е р (What are x and y? M e n g e r K a r l), Math. Gaz., 1956, **40**, № 334, 246—255 (англ.)

Наиболее употребительные в математике символы: x и y логически перегружены и не могут быть понимаемы однозначно. Такая же неоднозначность свойственна многим понятиям математического анализа: переменной, функции и т. д. Статья содержит попытку устранения этой неоднозначности путем следующих рассуждений.

В математическом анализе оперируют с величинами, т. е. с упорядоченными парами (a, b), где b —значение, являющееся числом, a — объект, могущий быть чем угодно (anything), Класс величин, не содержащий двух величин с равными объектами и с неравными значениями, есть класс совместимых величин, или флюента. Класс объектов флюенты — ее область, класс значений — ранг. Флюенты, областью которых являются числа, или системы чисел, называются функциями. Дальнейшее обобщение доставляет оператор, определяемый как класс пар функций, не содержащий двух пар с одинаковыми первыми и неравными вторыми членами. Переменная трактуется как символ, способный (без изменения смысла задачи) быть замененным элементом определенного класса (области определения переменной). На примерах разъясняются и разграничиваются эти основные понятия и вводятся усложнения (порядок функции, тождественность и т. д.).

Вопрос о смысле символов x и y в математических выражениях имеет «12 ответов». В зависимости от контекста x и y суть:

1. Числовые переменные. Их роль может быть: указательная, когда речь идет о замене их числами; связующая, если образуются элементы определенного класса; условная, допустимая при определении класса чисел через посредство условий; повелительная, например, найти все x и y такие, что $2x + 3y = 5$ и $x + y = 3$.

2. Тождественные функции. Например, x есть класс всех пар вида (x, x) для любого x (соответственно для y).

3. Специальные функции 2-го порядка, т. е. величины вида $f((a, b)\, a)$ и $f((a, b), b)$.

4. Обозначения действительной и коэффициента мнимой части комплексного числа.

5. Элементы многочленной или рациональной формы.

6. Части операционных символов, например, $\frac{d}{dx}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и т. п.

7. Операторы.

8. Специфические флюенты — координаты физической или постулированной плоскости.

9. 10. Переменные, областью которых являются классы функций или флюент.

11. Случайные переменные в теории вероятностей и статистике.

12. Ненужные элементы в символических выражениях, например в определенных интегралах, так как в определении последних как пределов сумм символы x и y не используются.

Проводятся параллели между грамматикой английского языка и математической символикой. Вносятся многочисленные предложения о видоизменении символики. В основном, эти предложения автор реализовал в книге: Calculus. A modern approach 1953 и 1955 (РЖМат, 1953, 1234 РЕЦ.). К. А. Рыбников

6077. О формулировке некоторых арифметических вопросов. Кертис, Менгер (On the formulation of certain arithmetical questions. Curtis Herbert J., Menger Karl), Math. Teacher, 1956, 49, № 7, 528—530 (англ.)

6078. Циркулярное письмо Бюро международной комиссии по математическому образованию руководителям национальных подкомиссий. Дефорж, Бенке (Lettre circulaire du Bureau de la commission internationale de l'enseignement mathématique aux dirigeants des sous-commissions nationales. Desforge J., Behnke H.), Enseign. math., 1956, 1, № 4, 262—265 (франц.)

Содержит сведения о составе руководства, официальном органе и плане работ комиссии на 1955—1958 гг. И. К. Андронов

6079. Общеобразовательный курс чистой математики. Роджерс (A general education course in pure mathematics. Rogers Hartley, Jr). Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 7, 460—465 (англ.)

В 1955 г. в Гарвардском университете автор прочел для студентов первого семестра первого курса 37 одночасовых лекций. В них излагались: 1. Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$, существования бесконечного множества простых чисел и единственности разложения числа $N > 1$ на простые множители (2 часа). 2. Аксиоматический метод (1 час). 3. Критический обзор доказательств евклидовой геометрии (2 часа). 4. Аксиоматическое построение геометрических теорий (7 час.). 5. Гильбертова система аксиом геометрии (4 час.). 6. Происхождение и развитие неевклидовой геометрии (6 час.). 7. Основные понятия современной алгебры (7 час.). 8. Кардинальные числа Кантора, мощность множества и трансфиниты (5 час.). 9. Элементы теории множеств, парадоксы (3 час.).

Основное пособие: Курант и Роббинс «Что такое математика». Рекомендовались и другие пособия. В конце семестра студенты писали индивидуальные проверочные работы. Автор отмечает, что цель — пробудить у студентов интерес к абстрактному математическому мышлению, была достигнута. И. К. Андронов

6080. Преподавание математики в средней школе. Джаниарелли (L'insegnamento delle matematiche nelle scuole secondarie. Giannarelli Roberto), Archimede, 1956, 8, № 4—5, 180—189 (итал.)

Сообщение о работе 19-й Международной конференции по народному образованию (8—17 июля 1956 г. в Женеве), посвященной преподаванию математики в средней школе. На основании данных, поступивших от 62 стран в ответ на разосланную Международным бюро анкету, проф. Серве (Servais, Бельгия) дал обзор современного состояния преподавания математики в школах этих стран. Число недельных уроков по математике в старших классах средней школы в среднем колеблется между 4 и 6, составляя от 9 до 20% всего числа уроков (в США 5 уроков по 45—55 мин., в Англии и Шотландии 6 и 7 40-минутных уроков). В нескольких странах в старших классах число уроков доходит до 10 и 12 в неделю, составляя от 20 до 40% общего числа уроков. Различие числа уроков математики в женских и мужских классах встречается лишь в немногих странах (Дания, Индия).

В качестве недостатка преподавания отмечается неподготовленность учителей математики по психологии и дидактике (проф. Piaget, Dieudonne и др.). Вопрос о подготовке учителей был предметом обсуждения специальной 17-й конференции в 1954 г., которая признала знание учителем психологии юношеского возраста столь же важным моментом подготовки будущего учителя, как и знание предмета преподавания. Результаты прений было поручено сформулировать в виде инструктивного письма, которое было составлено и разослано под названием «Рекомендация № 43 министерствам просвещения от Международной комиссии по народному образованию о преподавании математики в старших классах средней школы». От СССР в редакционную комиссию входил А. И. Маркушевич. И. Я. Депман

6081. О проекте учебной программы по математике. Вансинк (Het ontwerp-leerplan voor wiskunde van de Wimecos-commissie. Wansink Joh. H.).

Euclides (Nederl.), 1955—1956, **31**, № 5—6, 213—232 (гол.).

Автор освещает историю проникновения элементов дифференциального и интегрального исчисления в среднюю школу в Нидерландах. Попутно говорит об истории возникновения Международной комиссии математического образования и об организации Национальной нидерландской подкомиссии, которой и был создан проект учебной программы по математике. Характерным в этой программе является стремление повысить активность учащихся на уроках математики, для чего необходимо устранить перегрузку и изменить методы обучения.

Констатируется тенденция уменьшения времени, отводимого на изучение математики. Обращается внимание на чрезмерно большое количество задач в курсе математики. И. К. Андронов

6082. Корни и логарифмы. Браун (Roots and logarithms. Brown Elizabeth F.), Math. Teacher, 1956, 49, № 7, 544—547 (англ.)

Излагается прием извлечения корня, известный для квадратного корня со времен Герона: число делится на произвольное другое, близкое к корню, затем на среднее арифметическое делителя и частного, и этот процесс повторяется до тех пор, пока частное и делитель совпадут или будут отличаться на 1. Автор распространяет прием на извлечение корня любой степени. Отсюда получается способ вычисления десятичного логарифма числа, если имеется таблица значений $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[100]{10}$, $\sqrt[1000]{10}$ и т. д., что представляет интерес, так как логарифм вычисляется непосредственно как показатель степени, без обращения к каким-либо другим понятиям. И. Я. Депман

6083. Состояние вопроса о программе по математике для одаренных учащихся в средней школе. Баумгартнер (The status of the secondary mathematics program for the talented. Baumgartner R. A.), Math. Teacher, 1956, 49, № 7, 535—540 (англ.)

Констатируется недостаток студентов в США, избирающих в высшей школе математическую специальность, в чем авторы ряда книг усматривают опасность для дальнейшего развития страны. Во многих штатах введены специальные дополнительные занятия по математике в IX—XII классах средней школы для учащихся, проявляющих интерес и способности к математике.

Приводятся программы этих курсов для ряда городов и штатов. Общей в них является тенденция введения в программу старших классов основ анализа, элементов статистики, аналитической геометрии пространства. Последняя мера имеет целью изжить недостаточное внимание к изучению стереометрии в школьных программах США. Подчеркивается важность вопроса о привлечении в кадры учителей математики лиц, способных к математике и ею интересующихся. Библ. 30 назв. И. Я. Депман

6084. Математика в школе и колледжах. Дьюрен (School and college mathematics. Duren William L., Jr), Math. Teacher, 1956, 49, № 7, 514—518 (англ.)

Автор констатирует сдвиг во мнениях общества в сторону понимания значения математики, который вызван требованиями практики, и признает отставание американской школы в подготовке учащихся по математике от европейской, особенно от советской школы; инженер любой специальности должен квалифицироваться по уровню его математической подготовки. Автор выступает против тенденции вкрапливать в курс средней школы вопросы, которые могут быть усвоены учащимися лишь в колледже, равно как против вторичного изучения школьной математики в колледжах. Школьная программа должна ограничиваться арифметикой, алгеброй, геометрией и тригонометрией. Автор дает свой план для XII года средней школы, в котором отсутствуют элементы дифференциального и интегрального исчисления, но включены приемы исчисления конечных разностей.

Примечание референта. На значение исчисления конечных разностей в курсе алгебры в свое время указывал Н. И. Лобачевский. И. Я. Депман

6085. Возвращение из Бельгии. Бигне (Retour de Belgique. Biguenet A.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, **35**, № 175, 222—231 (франц.)

Сообщение о докладе, сделанном автором на конгрессе в Беркхейме 12—13 ноября 1955 г.: «Дидактические материалы, иллюстрирующие преподавание математики». Дано описание пособий, представленных автором конгрессу. И. К. Андронов

6086. Сведения о математических документах. Белгодер (Conférences de documentation mathématique. 3e ed. Belgodère Paul. Docum. math., 1956, № 32, 8 p.) (франц.)

Список справочных математических изданий. Имеются разделы: 1) Документы. Здесь приведены математическая энциклопедия (французское и немецкое издания) и несколько книг типа книги Куранта и Гильберта «Методы математической физики». 2) Сборники математических формул. 3) Математические словари. 4) Серии монографий (например, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Сюда же входит издание: Труды математического института им. В. А. Стеклова). 5) Таблицы. 6) Библиографические издания, в том числе реферативные журналы по математике и ее приложениям (есть и РЖМат).

Много ценных сведений о библиотеках, музеях, математических институтах, обществах, съездах и т. п. В конце приведены некоторые аналогичные сведения по астрономии. М. К. Керимов

6087 К. Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 1. Ред.: Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. М., АН СССР, 1956, 294 стр., 15 р. 85 к.

Первый том сборника, являющегося результатом коллективного труда сотрудников Математического института им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. Коллектив авторов исходил из намерения «ознакомить достаточно широкие круги советской интеллигенции с содержанием и методами отдельных математических дисциплин, их материальными основами и путями развития» (стр. 3). Выбор и характер изложения материала были подчинены требованию, чтобы книга давала «представление о современном состоянии математики, ее происхождении и перспективах развития в целом» (стр. 3) и тем самым способствовала бы расширению научной перспективы молодых математиков.

Сборник трехтомный; составлен из 20 глав, написанных разными авторами. В первый том входят 4 главы:

Гл. 1. Общий взгляд на математику. Александров А. Д. Цель первой главы (стр. 5—78) — дать общее представление о сущности математики. Формулируются и разъясняются особенности математики: абстрактность предмета, логическая строгость выводов и необычайная широта применений. На элементарных примерах из истории развития арифметики и геометрии демонстрируется формирование математических понятий в процессе общественно-практической жизни людей и перерастание совокупности знаний арифметических и геометрических фактов в математические теории. Упомянутые особенности математики являются плодом все возрастающей отвлеченности в рассмотрении коли-

чественных отношений и пространственных форм действительного мир. Развитие математики происходит в борьбе многих сплетающихся в ней противоположностей: конкретного и абстрактного, частного и общего, формального и содержательного, конечного и бесконечного, прерывного и непрерывного и т. д.

В последующем кратком историческом очерке автор придерживается общепринятого (см., например, БСЭ, т. 26, статья «Математика») разделения истории математики на периоды: зарождения математики, элементарной математики, математики переменных величин и современной математики. Очерк завершается характеристикой качественных изменений в геометрии, алгебре, математическом анализе, происшедших ко второй половине XIX в. Наличие этих изменений, а также появление новых областей математики, среди которых автор особо выделяет вычислительную математику и математическую логику, определяет новый период — период современной математики.

К этому времени отмеченные выше особенности математики достигают столь большого развития, что приводят к расширению ее предмета. Последний составляют уже не только данные, но и возможные количественные отношения и формы. По определению автора, «современная математика есть математика возможных, вообще говоря, переменных, количественных отношений и взаимосвязей между величинами» (стр. 60).

Конец главы посвящен сущности математики и закономерностям ее развития. Доказывается, что не только понятия, но и выводы и методы математики отражают действительность. Новое вырастает в ней на основе отражения действительности, вследствие логики ее предмета и в силу этого возвращается к действительности в применениях. В сферу математики вовлекаются все новые виды количественных отношений действительности. Ее предмет уже составляют «те формы и отношения действительности, которые объективно обладают такой степенью безразличия к содержанию, что могут быть от него полностью отвлечены и определены в общем виде с такой ясностью и точностью, с сохранением такого богатства связей, чтобы служить основанием для чисто логического развития теории» (стр. 68). Ниже автор более коротко формулирует эту мысль: «математика имеет своим предметом количественные отношения и формы, взятые в их чистом виде». Определение предмета математики Энгельсом в ходе ее развития получает все более глубокую трактовку.

Коренным противоречием в сущности математики является противоречие между стремлением выделить эти отношения и формы в чистом виде и их неотделимостью от содержания. Противоречие это влечет за собой другие противоречия и в его диалектическом разрешении в основном состоит развитие математики. Последнее понимается как результат взаимодействия логики предмета математики, влияния производства и связей с естествознанием.

Объективное содержание математики, как и всякой другой науки, всегда укладывается в те или иные идеологические формы. Поэтому на степень и пути развития математики воздействует борьба материализма, соответствующего объективному содержанию науки, и идеализма, противоречащего ему и извращающего его. На примерах современных идеологических течений в математике показывается преимущество диалектического материализма.

Гл. 2. Анализ. Лаврентьев М. А., Никольский С. М. Эта глава (стр. 79—179) имеет целью познакомить читателя, знающего только элементарную математику, с возникновением, смыслом и простейшими приложениями основных понятий анализа: функции, предела, производной и интеграла. Изложение популярное, много ссылок на другие статьи сборника, в которых трактуются специальные вопросы математического анализа. Последний понимается в широком смысле как раздел математики, включающий методы количественного исследования процессов изменения, движения, зависимости одних величин от других.

Вслед за введением (§ 1), значительную часть которого содержит исторический очерк, следуют параграфы, посвященные разъяснению понятий: функции (§ 2), предела (§ 3) и непрерывности функций (§ 4). В конце каждого параграфа приведены упражнения для читателей. Понятие производной и вопросы, с ним связанные, занимают §§ 5—9. В §§ 10—11 вводятся и разъясняются понятия определенного и неопределенного интеграла. Первый вводится как

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

без использования сумм Дарбу. Формула Ньютона—Лейбница связывает понятия определенного и неопределенного интеграла и дает возможность авторам сразу перейти к изложению техники интегрирования. Обобщениям понятия интеграла (§ 13) естественно предшествуют необходимые элементы теории функций многих переменных (§ 12). Здесь рассматриваются способы задания функций, геометрическое изображение функций двух переменных, частные производные и дифференциалы, дифференцирование неявных функций, отыскание экстремумов и теорема Тейлора (без доказательства).

Упомянутые обобщения понятия интеграла включают в себя краткое разъяснение понятий кратного, контурного и поверхностного интеграла и физического смысла формулы Остроградского. При этом отмечается, что формула Ньютона—Лейбница может быть интерпретирована как одномерный случай формулы Остроградского, что поясняется примером течения жидкости в трубе постоянного сечения при наличии фильтрации через стенки. Главу завершает § 14: «Ряды», посвященный в основном разъяснению понятия сходимости ряда и равномерной сходимости ряда функций.

На стр. 100 и 142 содержатся неверные утверждения, что четкое формальное определение понятия предела и других понятий математического анализа было дано в начале прошлого века в работах Коши. В действительности это произошло лет на 50—60 позднее, когда для подобных определений был создан и регулярно использован специфический аппарат неравенств («ε, δ-хозяйство»). Ошибочно также указывается (стр. 109), что впервые пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции дал Вейерштрасс; это значительно ранее сделал Больцано.

Гл. 3. Аналитическая геометрия Делоне Б. Н. Глава (стр. 180—248) имеет две особенности: а) содержание этой науки раскрывается в непосредственной связи с историей ее развития; б) большое место уделяется приложениям. Подчеркивается, что сама аналитическая геометрия является необходимым математическим методом для изучения других отделов математики, механики, физики и других естественных наук.

Во введении (§ 1) кратко формулируются исторические предпосылки, приведшие к созданию аналитической геометрии в трудах Декарта и Ферма. В виде разъяснения идей Декарта в §§ 2—5 вводятся: прямолинейные ортогональные координаты и метод выражения геометрических свойств алгебраическими уравнениями. Аналитическая геометрия определяется как часть математики, которая, применяя координатный

метод, исследует геометрические объекты средствами алгебры (стр. 183). Разъясняются простейшие задачи аналитической геометрии, способы исследования линий, выраженных уравнениями 1-й и 2-й степени, нахождение корней уравнений 3-й и 4-й степени пересечением окружности и параболы. Изложение модернизированное; при этом Декарту ошибочно приписаны введение термина «координаты» (стр. 181) и классификация кривых по степеням уравнений (стр. 184).

Следующий этап развития аналитической геометрии автор связывает с ньютоновской классификацией линий, выражаемых алгебраическими уравнениями 3-й степени с 2 неизвестными. В §§ 6 и 7 содержатся доказательство средствами аналитической геометрии теоремы Ньютона о диаметрах линий n-го порядка, соответствующих секущим данного наклона, а также исследование отдельных видов кривых 2-го порядка с указанием их приложений: эллипс инерции, отражательные телескопы, параболические отражатели (прожекторы, фары).

Приведению общих уравнений 2-й степени к каноническому виду посвящен § 8. Разработка способов приведения, равно как и построение первого курса аналитической геометрии в близком к современному смысле слова, составляют обобщения, знаменующие новую ступень развития аналитической геометрии. Эти обобщения впервые проделал Эйлер в 1748 г. во «Введении в анализ», т. 2.

Аналитическую геометрию в пространстве автор начинает (§§ 9—10) с изложения элементов теории векторов, в качестве прообраза которой называет арифметизацию сил, скоростей и ускорений, произведенную Лагранжем в «Аналитической механике» (1788). Последующее исследование общих уравнений 1-й и 2-й степени с тремя переменными и приведение к каноническому виду производится, однако, без использования векторов.

Материал собственно аналитической геометрии в настоящей главе завершают аффинные преобразования (§ 11) и теория инвариантов (§ 12). Введение в геометрию теории преобразований рассматривается как очередной важный этап в развитии аналитической геометрии, расширяющий ее связи и возможности приложений.

Элементы проективной геометрии (§ 13) и лоренцевы преобразования (§ 14) демонстрируют это расширение. В частности, упоминается, что теория преобразований Лоренца оказывается связанной не только с различными геометрическими теориями, но и с теорией конформных отображений и многими прикладными задачами математики.

В заключение говорится о дальнейших обобщениях материала аналитической геометрии: о различных усложнениях координатных систем, многомерных и бесконечномерных пространствах и о предмете алгебраической геометрии. Указывается, что последняя может рассматриваться как та часть математики, которая занимается изучением геометрических образов, выражаемых в декартовых координатах уравнениями сколь угодно высоких степеней. В силу этого она является непосредственным продолжением обычной аналитической геометрии.

Гл. 4. Алгебра (теория алгебраического уравнения). Делоне Б. Н. Первая из трех глав сборника, посвященных алгебраической тематике. Введение к главе (§ 1) трактует о предмете алгебры. В ходе исторического развития под алгеброй последовательно понимали: а) науку о буквенных вычислениях, о преобразованиях формул, об элементарных приемах решения уравнений и т. п. (до второй половины XVIII в.); б) теорию специально алгебраических уравнений (конец XVIII — начало XIX в.); в) аксиоматическую или абстрактную современную алгебру. Алгебраический же метод, т. е. метод буквенных вычислений, с давних пор пронизывает всю математику.

Проблема алгебраического решения уравнения $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ (§ 2) изложена тоже в историческом плане. Даны исторические справки: о способах решения в радикалах уравнений первых четырех степеней, о попытках Лагранжа, приведших к введению в математику резольвенты Лагранжа и групп подстановок корней уравнения. Открытие Абелем неразрешимости в радикалах уравнений степени выше 4-й упоминается без доказательства. Разъясняются основные идеи теории Галуа и приложение этой теории к вопросу о разрешимости геометрических задач циркулем и линейкой. Указывается на 2 неразрешенные проблемы, связанные с теорией Галуа: а) о сведении уравнения любой степени к цепи уравнений с минимальным числом параметров и о виде этих параметров; б) обращение теории Галуа, т. е. решение вопроса, всякая ли группа перестановок может быть группой Галуа некоторого уравнения и каковы все те уравнения, группой которых она является.

Основная теорема алгебры (§ 3) в своей постановке показана как естественное историческое следствие многовековой практики решения уравнений. Ее доказательство трактуется как следствие леммы Даламбера: Если a — какое угодно заданное комплексное число, такое, что $f(a) \neq 0$, то можно найти сколь угодно малое по модулю комплексное число h, чтобы $|f(a+h)| < |f(a)|$. Предварительно сообщаются необходимые сведения о комплексных числах и о минимумах поверхностей модуля многочлена над комплексной плоскостью.

Исследование расположения корней многочлена (§ 4) и отделение корней проводится на комплексной плоскости. В основном используются: правило знаков Декарта и теорема Штурма. Метод Штурма отделения корней на действительной оси приведен без доказательства. Аналогичная задача определения числа корней уравнения в заданной комплексной плоскости разобрана подробно, равно как и задача об условиях расположения всех корней уравнения влево от мнимой оси. Указывается на возможность выразить это условие посредством детерминантов, которые будут разъяснены в третьем томе, гл. 16.

В заключение (§ 5) приводятся способы приближенного вычисления корней алгебраического уравнения: посредством последовательных уточнений, касательных (Ньютона), хорд (ложного положения) и метод Лобачевского—Греффе.

Вводный характер статей реферируемого тома по отношению к материалу последующих томов сборника неоднократно подчеркивается как указаниями в тексте, так и многочисленными отсылками. Том снабжен оглавлением, указателем имен и перечнем глав, составляющих содержание 2-го и 3-го тт. сборника. К каждой главе дан рекомендательный список литературы.

К. А. Рыбников

6088 К. Собрание математических сочинений. Т. 2. Каратеодори (Gesammelte mathematische Schriften. 2 Bd. Caratheodory Constantin. München, C. H. Beck, sche Verlagsbuchhandl., 1955, 575 S).

Том 1 см. РЖМат, 1957, 4507 К. Том содержит 26 статей, из них 6 по вариационному исчислению (по геометрическим методам и по истории вариационного исчисления), 2 по термодинамике, 8 по геометрической оптике и 10 по механике. Введение написано Титце (Tietze H.). Приводится фотография автора 1932 года и фотографии рукописей двух статей.

М. К. Керимов

6089 К. Собрание математических сочинений. Т. 3. Каратеодори (Gesammelte mathematische Schriften. Bd. 3. Caratheodory Constantin. München, C. H. Beck'sche Verlagsbuchandl, 1955, IX + 464 s., DM 46.00)

Третий том сочинений автора; содержит 27 статей по теории функций комплексного переменного (часть написанных автором статей в этой области).

Статьи распределены по следующим разделам:

1. Проблема Пикара (5 статей); 2. Проблема коэффициентов (6 статей); 3. Лемма Шварца (7 статей); 4. Конформные отображения: теорема существования (5 статей); 5. Конформные отображения: переменные области (4 статьи). Введение написано Титце (Tietze). Имеется фотография автора, снятая в 1920—1924 годах.

М. К. Керимов

6090 К. Математические исследования. Лигуори (Ricerche matematiche. Liguori Fernando. Napoli, R. Pironti e F., 1955, 47 p, 400 L.), Bibliogr. ital., 1955, 89, N 647, 133 (итал.)

6091 К. Сборник математических формул. Бжоска, Барч (Mathematische Formelsammlung. 3. Aufl. Brzoska Franz, Bartsch Walter. Leipzig, Fachbuchverl., 1956, X, 345 S. 7.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 51—52, 3659 (нем.)

6092 К. От пуля к бесконечности. Шнейдер (Von der Null zur Unendlichkeit. Mathemat. Plaudereien f. Nichtmathematiker. Schneider Erich. Berlin—München, Gebr. Weiss, 1954, 322 S., ill., 7.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 22, 1573 (нем.)

6093 К. Игра с бесконечностью. Математика для нематематиков. Петер (Das Spiel mit dem Unendlichen. Mathematik für Außenstehende. Péter Rozsa. Übers. aus d. Ungar. Leipzig, Teubner, Verl.-Ges. in Verwaltung, 1955, VI, 278 S., ill., 9.80 DM), Dtsch. Bibliogr., 1956, № 2, 106 (нем.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

6094. Влияние Востока на греческую математику. Гиллингс (The oriental influence on Greek mathematics. Gillings R. J.), Math. Gaz., 1955, 39, № 329, 187—190 (англ.)

По свидетельству Прокла вывод формулы

$$m^2+\left[\frac{1}{2}m^2-1\right]^2=\left[\frac{1}{2}(m^2+1)\right]^2$$

для определения целочисленных значений длин сторон прямоугольного треугольника при нечетном m приписывается Пифагору, а формула

$$n^2+\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2-1\right]^2=\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2+1\right]^2$$

при четном n — Платону. Автор указывает на вывод Бретшнейдером и Трейтлиным первой формулы из сопоставления квадратов натуральных чисел и их разностей и при помощи гномонов и фигурных чисел.

Анализ одной из ошибок таблички, которая содержит 15 троек целых чисел, удовлетворяющих соотношению $l^2+b^2=d^2$ позволяет утверждать, что вавилоняне за 1000 лет до Пифагора владели алгебраическим способом определения целых чисел, выражающих длины сторон прямоугольного треугольника по формуле

$$(2pq)^2+(p^2-q^2)^2=(p^2+q^2)^2,$$

где p и q — взаимно простые числа. Формулы Пифагора и Платона являются частными случаями этой формулы.

По мере расшифровки клинописных текстов все убедительней выясняется сильное влияние вавилонской математики на греческую арифметику и алгебру.

А. Е. Раик

6095. Дроби в древнем Египте. Мацумото (エジプト型分數についての一考察。松本清次郎), 科學, Кагаку, 1956, 26, № 2, 97 (японск.)

6096. Исследования древних китайских математиков по вопросу о площадях. Ли Ди (中國古代數學家對面積的研究。李迪), 數學通報, Шусюэ тунбао, 1956, № 7, 23—25 (кит.)

Вопрос о площадях рассматривается главным образом на основании материала комментариев Лю Хуэя (III в. н. э.) к первой книге «Измерение полей» трактата «Математики в девяти книгах», составленной не позже начала н. э. После неполного перечисления формул площадей фигур, данных в книге I трактата, автор очень кратко характеризует учение Лю Хуэя о площадях, отмечая при этом его большие заслуги в данной области. Известно, что у Лю Хуэя впервые встречается понятие предела: под площадью круга он понимал предел площадей правильных вписанных в него многоугольников. При этом он вычислил значение $\pi = 3{,}14$, которое было в то время наиболее точным. Лю Хуэй указал на неточность формулы для площади сегмента, помещенной в книге I «Математики», и справедливо указал, что с уменьшением сегмента ошибка растет. Он предложил вычислять площадь сегмента методом, аналогичным его методу определения площади круга.

Автор также указывает на аксиомы и теоремы, которыми пользовался и которые доказывал Лю Хуэй. К первым относятся принцип равносоставленности, формула площади прямоугольника и положение о том, что сумма объемов частей тела равна объему его. К последним — группа предложений о получении формул площадей треугольника, трапеции, ромба; соотношение между площадями прямоугольника, параллелограмма и треугольника с одними и теми же основанием и высотой и т. п. Кроме того, автор утверждает, что хотя соответствующий текст комментариев Лю Хуэя неясен, однако можно думать, что он дал доказательство теоремы Пифагора.

Лю Хуэй был первым в истории китайской математики, не считая Чжао Цзюнь-циня, кто сопровождал теоремы письменными доказательствами.

Э. И. Березкина

6097. «Практика геометрии» Гугона Викторинца. Барон (Hugonis de Sancto Victore Practica geometriae. Baron R.), Osiris, 1956, 12, 176—185 (франц.), 186—224 (лат.)

Публикация латинского трактата на основе 6 рукописей, хранящихся в Париже, Кембридже и Лейдене (в 1897 г. трактат был издан М. Курце по несовершенному мюнхенскому списку). Автор устанавливает принадлежность его Гугону Викторинцу, иначе Гугону из монастыря св. Виктора близ Парижа (умер в 1141 г.) Сочинение, как бы подводящее итог состоянию западно-европейской средневековой математики до ее преобразования под влиянием знакомства с арабоязычной литературой, состоит из а) краткого введения («пролога»); б) разъяснения основных терминов и исходных положений; в) «альтиметрии» (технические указания по измерению высот); г) «планиметрии» (измерение расстояний на горизонтальной плоскости) и д) «космометрии» (астрономические измерения). В основном изложение сводится к практическим предписаниям, принципы которых, однако, уясняются читателем

благодаря наличию вводной части, содержащей главнейшие положения геометрии треугольников, круга и сферы. В. П. Зубов

6098. **Значение решения уравнения третьей степени для развития математики. Локки** (Kolmannen asteen yhtälön merkityksestä matematiikan kehitykselle. Lokki Olli), Arkhimedes, 1956, № 2, 22—27 (фин.)

Исторический обзор решений кубических уравнений от вавилонян до Кардано, Тартальи и Виета. Содержит только общеизвестные факты. И. Я. Депман

6099. **К истории преподавания элементов высшей математики в русской средней школе (1900—1917 гг.). Кузнецов В. Т.** Уч. зап. Саратовск. пед. ин-та, 1956, вып. 23, 137—167

В статье излагаются: 1) борьба за реформу преподавания математики; 2) вопросы преподавания математики, обсуждавшиеся на I и II Всероссийских съездах преподавателей математики (1911 и 1913 гг.); 3) рассмотрение проекта программ по математике Министерства народного просвещения 1915 г.; 4) анализ преподавания элементов высшей математики в седьмых классах реальных училищ; 5) краткий обзор 6 учебников по аналитической геометрии и 6 — по анализу бесконечно малых. И. К. Андронов

6100. **Василий Андрианович Евтушевский (К 120-летию со дня рождения). Прудников В. Е.,** Матем. в школе, 1956, № 5, 15—20

Обзор деятельности методиста-математика В. А. Евтушевского (1836—1888), автора самых распространенных в России учебников «Методика арифметики» (1-е изд. в 1872 г.; в 1877 г.—7-е изд) и «Сборика арифметических задач» (1-е изд. в 1871 г., в начале XX в. — 35-е изд.). И. Я. Депман

6101. **Столетие со дня смерти великого математика и физика Гаусса. Гонсалес-де-ла-Фуэнте** (En el centenario de Gauss. González de la Fuente Carlos), Scientia (Valparaiso), 1955, 22, № 1, 8—11 (исп.)

6102. **Густав Дюма. Рам** (Gustave Dumas. Rham Georges de), Elem. Math., 1955, 10, № 6, 121—122 (нем.)

6103. **Др. Николсон. (Некролог). Вильсон** (Dr. J. W. Nicholson, F. R. S. (Obituary). Wilson Wm.), Nature, 1955, 176, № 4492, 1051 (англ.)

6104. **Арчибалд Рид Ричардсон. Тернбулл** (Archibald Read Richardson. Turnbull H. W.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 3, 376—384 (англ.)

См. также РЖМат, 1957, 1077.

6105 К. **Собрание сочинений. Т. 17. Кеплер** (Gesammelte Werke. Kepler Johannes. Bd 17, Briefe 1612—1620. Hrsg. Caspar Hans. München, Beck, 1955, 535 S., 43. — DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 15, 1081 (нем.)

6106 К. **К истории математики. Кофлер** (Z dziejów mathematyki. Kofler Edward. Warszawa, «Wiedza Powszechna», 1956, 279, 1 nlb. s., il., 9.40 zł), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 11, 143 (польск.)

6107 К. **История начертательной геометрии. Татон** (L'Histoire de la géométrie descriptive. Taton René, Paris, Palais découverte, 1954, 27 p. ill., 110 fr. Bibliogr. France, 1955, 144, № 1, 7 (франц.)

См. также: 6113, 6504, 6507К, 6519, 6550, 6577, 6578, 6599К, 6756

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

6108. **Конечнозначные и функциональнополные подсистемы $\aleph_0$-значного исчисления высказываний. Ху Ши-хуа** (ℵ₀值命題演算的有窮值的具有函數完全性的子系統。胡世華), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, 5, № 2, 173—191 (кит.; рез. нем.)

Автор рассматривает исчисления $\mathfrak{P}^n$, $\mathfrak{P}_*^n$ и $\mathfrak{P}_*$, построенные на базе примитивных (C^n, N^n, T), (C^n, F^n) и (C, F). Упомянутым примитивным отвечают следующие таблицы:

C^n	0 1 … $n-1$
0	0 1 … $n-1$
1	0 0 … $n-2$
.	. . . . .
.	. . . . .
.	. . . . .
$n-1$	0 0 … 0

N^n	
0	$n-1$
1	$n-2$
.	.
.	.
.	.
$n-1$	0

	T
0	1
1	1
.	.
.	.
.	.
$n-1$	1

	F^n
0	1
1	2
.	.
.	.
.	.
$n-2$	$n-1$
$n-1$	$n-1$

C	0 1 2 …
0	0 1 2 …
1	0 0 1 …
2	0 0 0 …
.	. . . .
.	. . . .
.	. . . .

	F
0	1
1	2
2	3
.	.
.	.
.	.

Устанавливается возможность вложения n-значных исчислений $\mathfrak{P}^n$ и $\mathfrak{P}_*^n$ в $\aleph_0$-значное исчисление $\mathfrak{P}_*$. Это вложение полностью определяется указанием образов примитивных

$$C^n rs \to CCsFCssCr^{n-1}FCrr$$
$$I^n r \to CCFrFCrr^{n-1}FCrr$$
$$N^n r \to Cr^{n-1}FCrr$$
$$Tr \to FCrr$$

(где ^{n-1}Ft обозначает $\underbrace{F \ldots F}_{n-1 \text{ раз}} t$).

Отмечается, что подобным образом можно вкладывать в $\mathfrak{P}^*$ и другие конечнозначные и функциональнополные исчисления высказываний. С. В. Яблонский

6109. **О символическом представлении логических процессов доказательств. Гитель** (Sur une représentation symbolique du processus logique d'une démonstration. Guitel G.), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A5, 25—28 (франц.)

Отмечается, что построения (теоремы), которые требуют получения промежуточных результатов (лемм), можно сделать более наглядными, если каждому такому построению сопоставить ориентированный граф. Вершинам графа отвечают аксиомы, леммы, теоремы; вершина a_i соединена с вершиной a_j направленным отрезком $\overrightarrow{a_i a_j}$, если предложение a_j использует при своем обосновании предложение a_i. Указывается, что такого рода графы могут использоваться для иллюстраций в лекциях, а также при построении самих доказательств в целом ряде дисциплин (математика, электротехника, этнография, филология и биология). Приводятся графы, поясняющие доказательства теорем.

В заключение помещено резюме обсуждения данного вопроса. Р. Е. Кричевский, С. В. Яблонский

6110. Логические символы в изучении дедуктивных теорий. Юхансson (Symboles logiques dans l'enseignement des théories déductives. Johansson Ingebrigt), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A5, 21—24 (франц.)

Обсуждается вопрос об употреблении логических символов в изложении дедуктивных теорий. Автор указывает, что обычно такое изложение связано с освещением следующих пяти вопросов: 1) представление результатов наблюдений, 2) эвристическое рассмотрение наблюдений, 3) построение дедуктивной теории, 4) метатеоретические и дидактические комментарии, 5) сопоставление теоретических результатов с наблюдениями. Логические символы удобны для изложения 3). Однако описание 1), 2), 4) и 5) не требует специальной символики, поэтому необходим, наряду с символикой, обычный текст. Поскольку в математических книгах 3) составляет основную часть, то символика должна занимать значительное место. Автор отмечает, что символика делает более наглядными дедуктивные рассуждения и облегчает различение мест, где излагается дедукция, от мест, где идут комментарии. Наряду с этим указывается, что существуют принципиальные трудности в использовании специальной символики — отсутствие развитого символизма и отвращение к логической символике (даже у математиков). В заключение приводится обмен мнениями по данному вопросу.

Р. Е. Кричевский, С. В. Яблонский

6111. Некоторые приложения теории бинарных отношений. Риге (Quelques applications de la théorie des relations binaires. Riguet J.), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A5, 141—144 (франц.)

Разбираются некоторые приложения теории бинарных отношений, развитой ранее автором в монографии «Fondements de la théorie des relations binaires». Вначале определяется понятие бинарного отношения и указывается его связь с ориентированными графами и матрицами определенного типа. Далее отмечается, что над бинарными отношениями можно производить обычные теоретико-множественные операции. Кроме них, вводятся еще две операции — операция симметрии и операция композиции двух отношений. В последующем показывается, что теория бинарных отношений имеет широкие приложения. Для аргументации приводятся примеры из области биологии, из теории информации, из комбинаторики и из проективной геометрии.

Р. Е. Кричевский, С. В. Яблонский

6112. Взаимоотношение символической логики и сравнительного языкознания. Витте (The relations of symbolic logic and comparative linguistics. Witte J. J. de), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam—Louvain, 1953, 176—179 (англ.)

Рассматривается вопрос о значении сравнительного языкознания для символической логики. Р. Карнап и другие представители современной символической логики занимаются конструированием искусственных логических языков. Искусственные логические языки конструируются чисто абстрактным путем независимо от эмпирических исследований систем естественных языков.

По мнению автора, если бы представители символической логики уделяли внимание изучению естественных языков, то они могли бы извлечь из естественных языков важные логические элементы, имеющие существенное значение для конструирования искусственных логических языков.

Представители символической логики должны приняться за систематическое изучение систем естественных языков. Задача этого изучения должна состоять в том, чтобы отделить в естественных языках логические элементы от аффективных элементов. Используя логические элементы, выделенные в естественных языках, представители символической логики смогут усовершенствовать искусственные логические языки.

Объектом изучения должны быть все основные типы языков мира. Если представители символической логики обратятся к изучению языков, то этим будет перекинут мост между символической логикой и сравнительным языкознанием. Это принесет пользу не только символической логике, но и языкознанию, психологии и, в особенности, сигнифике (сигнификой называется дисциплина, изучающая влияние языка на мышление).

Как указывает автор, некоторые представители символической логики уже делали попытки связать конструирование искусственных логических языков с изучением естественных языков (например, Рейхенбах (H. Reichenbach) в его работе Elements of symbolic logic, 1947), но эти попытки были неудачны, так как представители символической логики не сумели освободиться от влияния схем логистической грамматики.

В статье приводятся примеры выделения логических элементов при анализе систем естественных языков.

Статья ценна постановкой вопроса о необходимости для представителей символической логики обратиться к систематическому сопоставлению искусственных логических языков с системами естественных языков. С данной статьей перекликается статья «Значение и синонимия в естественных языках» из книги Карнапа (Carnap R., Meaning and necessity, 2-ed., 1956), где Карнап излагает программу изучения представителями символической логики естественных языков в аспекте разработанных им семантических методов.

С. К. Шаумян

6113. Открывать или изобретать? Лохер-Эрнст (Entdecken oder Erfinden? Locher-Ernst L.), Elem. Math., 1954, 9, № 2, 25—29 (нем.)

Статья посвящена 60-летию со дня рождения Финслера, профессора математики и доктора философии. Дается далеко неполная и несистематическая библиография его трудов. Отсутствует сколько-нибудь подробный разбор его произведений.

Автор останавливается лишь на работах, касающихся непротиворечивости математики, в связи с чем поднимает всю историю этого вопроса, как и вообще формалистического направления в математике от его возникновения и до наших дней.

Что касается юбиляра, то автор ограничивается утверждениями, что он (Финслер) ответил на вопрос: существуют ли противоречия в математике, разгадав природу парадоксов, причем никто не обнаружил ошибки в его решениях, а также успешно рассматривал вопрос: при всех ли обстоятельствах формально непротиворечивая система аксиом является непротиворечивой и содержательной.

Работы Финслера, по мнению автора, приводят к заключению, что в математике можно не только изобретать (erfinden), как полагали формалисты, но и открывать (entdeken).

Автор выражает сожаление, что труды юбиляра до сих пор не стали общим достоянием.

Б. Н. Пятницын

См. также: 6076

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

6114. Разбиения расчлененных чисел. Райт (Partitions of multi-partite numbers. Wright E. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 5, 880—890 (англ.)

Пусть $|X_i|<1$ $(1\leqslant i\leqslant j)$; $F_j(Y)=\prod(1+X_1^{k_1}\dots X_j^{k_j}Y)$; $G_j(Y)=\prod(1-X_1^{k_1}\dots X_j^{k_j}Y)^{-1}$, где произведения распространяются на все неотрицательные $k_1,\dots,k_j$. Если $|Y|<1$, то получаем: $G_j(Y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}Q_j(n)Y^n$, где $Q_j(n)=\sum_{n_1,\dots,n_j=0}q(n_1,\dots,n_j;\ n)X_1^{n_1}\dots X_j^{n_j}$, а $q(n_1,\dots,n_j;n)$ — число разбиений j-расчлененных чисел $n_1,\dots,n_j$ на n частей. Также и $F_j(Y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}R_j(n)Y^n$, где $R_j(n)=\sum r(n_1,\dots,n_j;n)X_1^{n_1}\dots X_j^{n_j}$ и $r(n_1,\dots,n_j;n)$ — число разбиений на n различных частей.

Случай $j=1$ рассматривался ранее. В работе рассматривается случай $j>1$ и дана формула для $Q_2(n)$ при $n\to\infty$. В. А. Голубев

6115. Выражение числа разбиений через комбинаторные функции. Гупта (Partitions in terms of combinatory functions. Gupta Hansraj. Res. Bull. Panjab Univ., 1956, № 94, pp. 153—159) (англ.)

Пусть $p(n,m)$ обозначает число разложений n, на отличные от нуля слагаемые, количество которых не превосходит m; $A_r(n)=(a_0,a_1,\dots,a_{r-1})$. Если $n\equiv k\pmod r$, $0\leqslant k\leqslant r-1$, то полагаем $A_r(n)=a_k$. Приводятся две серии формул для вычисления функции $p(n,m)$ при $1\leqslant m\leqslant 12$. В первом случае $p(n,m)$ выражается через $A_r(n)$ и $C_r=\binom{n+r}{r}$, во втором — через $A_r(n)$ и $D_k=\binom{(N+k-1)/2}{k}$, где $N=2n+m(m+1)/2$. А. Ф. Лаврик

6116. Взвешенные разбиения для общих матриц над конечным полем. Ходжес (Weighted partitions for general matrices over a finite field. Hodges John H.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 4, 545—552 (англ.)

Пусть $GF(q)$, где $q=p^n$, p — простое, означает поле Галуа порядка p^n. Для $\alpha\in GF(q)$ положим $e(\alpha)=\exp(2\pi i t(\alpha)/p)$, $t(\alpha)=\alpha+\alpha^p+\dots+\alpha^{p^{n-1}}$. Если $A=(a_{ij})$ — квадратная матрица с элементами из $GF(q)$, положим $\sigma(A)=\sum_i a_{ii}$. Рассматривается сумма $S=S(B,W,R,A)=\sum_{UAV=B}e\{\sigma(UW+RV)\}$, где B,W,R,A,U,V — матрицы над $GF(q)$, A несингулярна и порядка m, B — квадратная порядка t, U',W,R',V — матрицы mxt, сумма всех пар U,V удовлетворяет уравнению $UAV=B$.

Доказывается (теорема 4), что S может быть выражена членами обобщенных сумм Клостермана, определенных для квадратных матриц над $GF(q)$, свойства которых даны в § 7 работы. В. А. Голубев

6117. Взвешенные квадратичные разбиения над $GF[q,x]$. Карлиц (Weighted quadratic partitions over $GF[q,x]$. Carlitz L.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 4, 493—505 (англ.)

Продолжение ряда работ автора (РЖМат, 1954, 1965, 3220, 4718; 1955, 1631), на результаты которых имеются ссылки в данной работе. При помощи лемм 1—7 с оценками сумм Гаусса, Клостермана и др. получены новые результаты. Из них главные — теоремы 1—2 о взвешенных суммах над полем $GF[q,x]$, выражающиеся несколькими сложными формулами. В. А. Голубев

6118. Многостепенные уравнения степени 3 порядка δ. Венкатараман (On multigrade equations of degree 3 and order δ. Venkataraman L. V.), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1955—1956, 6, № 2, 211—213 (англ.)

Многостепенными уравнениями степени k порядка δ называется совокупность уравнений

$$x_1^i+y_1^i+\dots+z_1^i=x_2^i+y_2^i+\dots+z_2^i=\dots=x_\delta^i+y_\delta^i+\dots+z_\delta^i,$$

где $i=1,2,\dots,k$. Показано, как из целочисленного решения многостепенных уравнений степени 2 порядка δ можно получить целочисленное решение многостепенных уравнений степени 3 порядка δ. С. В. Огай

6119. Обобщение некоторых интегральных тождеств, принадлежащих Ингаму и Зигелю. Белман (A generalisation of some integral identities due to Ingham and Siegel. Bellman Richard), Duke Math. J., 1956, **23**, № 4, 571—577 (англ.)

Указаны матричные обобщения интегральных формул Ингама и Зигеля, являющихся в свою очередь обобщениями известных интегральных равенств:

1) $\int_0^\infty e^{-xy}x^{s-1}dx=\Gamma(s)y^{-s}$, $\mathrm{Re}(s)>0$, $\mathrm{Re}(y)>0$ и

2) $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{cs}s^{-k}ds=\begin{cases}c^{k-1}/\Gamma(k), & \text{если } c>0,\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$

Метод автора тот же, что в статье Ингама (Ingham A. S., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1933, 29, 271—276).

Пример — обобщенная автором формула Ингама.

3) $\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{p(p+1)/2}\int\dots\int e^{tr(CS)}|S_p|^{-k_p}\dots|S_1|^{-k_1}\prod_{i\leqslant j}ds_{ij}=$

$$=\begin{cases}\dfrac{(2\sqrt{\pi})^{-\frac{p(p-1)}{2}}\,|C^{(1)}|^{\sum_{i=1}^{p}k_i-(p+1)/2}\,|C^{(2)}|^{-k_1}\dots|C^{(p)}|^{-k_p-1}}{\Gamma(k_p)\,\Gamma\left(k_p+k_{p-1}-\frac{1}{2}\right)\dots\Gamma\left(\sum_{i=1}^{p}k_i-\frac{p+1}{2}\right)}, & \\ \text{если } C>0,\\ 0 \text{ в других случаях.}\end{cases}$$

Здесь S_k — симметричные матрицы, $|S_k|$ — их определители, параметры $k_1,k_2,\dots,k_{p-1}$ выбраны так, что все выражения k_p, $k_p+k_{p-1}-1/2,\dots,\sum_{i=1}^{p}k_i-(p+1)/2$ положительны. Для этого достаточно, чтобы k_p было достаточно большим при произвольных k_i.

Автор высказывает предположение, что для обобщенной дзета-функции выполняется обобщенное матричное равенство, соответствующее известной формуле Липшица:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}e^{-nx}=\Gamma(s)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x+2\pi ik)^{-s}$$

$(\mathrm{Re}(s)>1,\ \mathrm{Re}(x)>0)$.

Е. П. Ожигова

6120. **Проблемы замкнутости и нули дзета-функции Римана.** Левинсон (On closure problems and the zeros of the Riemann zeta function. Levinson Norman), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 5, 838—845 (англ.)

Устанавливается два предложения, эквивалентных гипотезе Римана, о распределении нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$. Приведем одно из них.

Пусть $\{\lambda_n\}$ обозначает положительную возрастающую последовательность с условием $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}=\infty$; числа $\sigma_1<\sigma_2$ принадлежат сегменту $[1/2, 1]$.

Теорема 1. Если для заданных чисел $\varepsilon>0$, α и β, $\sigma_1<\alpha<\beta<\sigma_2$ можно указать натуральное число N и последовательность $\{a_n\}$, $n=1, \ldots, N$, (зависящие только от ε, α и β) такие, что

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{\exp(-\lambda_n x)}{1+\exp(-\lambda_n x)}-e^{-x}\right)^2(x^{2\alpha-1}+x^{2\beta-1})\,dx<\varepsilon,$$

то $\zeta(s)\neq 0$ в полосе $\sigma_1<\operatorname{Re}s<\sigma_2$. Верно и обратное утверждение. А. Ф. Лаврик

6121. **О некоторых постоянных, связанных с дзета-функцией Римана.** Бригс (Some constants associated with the Riemann zeta-function. Briggs William E.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 117—121 (англ.)

Харди и Рамануджаном (Ramanujan, Collected papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge, 1927) для $\zeta(s)$ — дзета-функции Римана было указано следующее разложение

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-s}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\gamma_n}{n!}(s-1)^n,$$

где $\gamma_n=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{t=1}^{N}\frac{\log^n t}{t}-\int_1^N\frac{\log^n x}{x}\,dx\right]$.

В реферируемой работе изучается величина и знак γ_n. Доказаны три теоремы.

Теорема 1. При $n\to\infty$ коэффициент γ_n бесчисленное множество раз меняет знак.

Теорема 2. $\gamma_n=(n/2e)^n\varepsilon(n)$, где $|\varepsilon(n)|<1$.

Теорема 3. Существует бесконечно много чисел n таких, что для любого $\varepsilon>0$ одновременно выполняются неравенства $n^{-\varepsilon n}<|\gamma_n|<n^{\varepsilon n}$. А. Ф. Лаврик

6122. **О свойстве иррациональных чисел.** Турович (Sur une propriété des nombres irrationnels. Turowicz A.), Ann. polon. math., 1955, **2**, № 1, 103—105 (франц.)

Рассматривается так называемая игра Банаха—Мазура, в которой два игрока, A и B, по очереди выбирают положительные числа так, чтобы они образовали произвольно возрастающую последовательность. Из последовательности $\{a_n\}$, полученной таким образом, образуется ряд $\sum_1^{\infty}a_n$. Если сумма этого ряда принадлежит к некоторому данному множеству Z действительных чисел, то игрок A выигрывает; в противном случае выигрывает игрок B. Рассматривается случай, когда множество Z есть множество всех иррациональных чисел. Автор находит, что в этом случае существует метод выбора чисел игроком A, обеспечивающий иррациональность числа $\sum_1^{\infty}a_n$, как бы ни поступал, подчиняясь правилам игры, игрок B. Другими словами, автор показывает, что в игре Банаха—Мазура, в которой множество Z является множеством всех иррациональных чисел, существует стратегия выигрыша для игрока A. Доказательство состоит в эффективном указании такой стратегии.

На стр. 104, 10 строка сверху опечатка: s_{2k+1}, должно быть s_{2k-1}. A. Zieba

6123. **О последовательностях $(\lambda_n x)$ и функциях $g(t)\in\mathfrak{S}^{(2)}$.** Коксма (Sur les suites $(\lambda_n x)$ et les fonctions $g(t)\in\mathfrak{S}^{(2)}$. Koksma J. F.), J. math. pures et appl., 1956, **35**, № 3, 289—296 (франц.)

Пусть $g(t)$ — вещественная функция с периодом 1, принадлежащая $\mathfrak{S}^{(2)}$ на $[0,1]$. $\sum c_h\exp(2\pi iht)$ — ее ряд Фурье, причем $c_0=0$ (это не снижает общности). Доказывается общая теорема (теорема 1), дающая достаточные условия на последовательность $(\lambda_n x)$, для того чтобы почти для всех $x\in[0,1]$ $N^{-1}\sum_{n=1}^{N}g(\lambda_n x)\to 0$ при $N\to\infty$. Частный случай: для $\lambda_n=n^k$ (k — натуральное) достаточным условием является $\sum_{h=2}^{\infty}|c_h|^2\times$ $\times\sum_{d|h}d^{-1}<\infty$. Это обобщение результата автора (РЖМат, 1956, 1253). А. Г. Постников

6124. **Некоторые оценки из алгебраической теории чисел, основанные на η-функции Дедекинда.** Кон (Some algebraic number theory estimates based on the Dedekind eta-function. Cohn Harvey), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 4, 791—796 (англ.)

Рассматривается кубическое поле $K_{a,b}$, порожденное $\sqrt[3]{ab^2}$, где $(a,b)=1$; $ab\neq 1$; a, b свободны от квадратов. Пусть h — число классов для $K_{a,b}$, $\varepsilon\,(>1)$ — фундаментальная единица $K_{a,b}$; $k=ab$ или $3ab$ смотря по тому, будет ли $a^2-b^2\equiv 0$ или $\not\equiv 0 \pmod 9$; $d=-3k^2$ — дискриминант $K_{a,b}$. Известная формула Дедекинда (Dedekind R., Gesammelte math. Werke, v. II, Braunschweig, 1931) гласит

$$\varepsilon^h=\Pi\Pi(\omega_1)/\Pi\Pi(\omega_0),$$

где $\Pi(\omega)=\eta(\omega)\,\eta(-\overline{\omega})\,(i(\overline{\omega}-\omega))^{1/2}$ $(\operatorname{Im}\omega>0)$, где $\eta(\omega)=\exp(\pi i\omega/12)\prod_{n=1}^{\infty}(1-\exp 2\pi i\omega n)$ — η-функция Дедекинда; ω_0, ω_1 пробегают корни квадратичных форм дискриминанта $-3k^2$ при некоторых дополнительных условиях. С помощью этой формулы получаются оценки:

$$h\ln\varepsilon=O(|d|^{1/2}\ln|d|\ln\ln|d|),$$

$$h=O(|d|^{1/2}\ln\ln|d|).$$

Ю. В. Линник

6125. **Асимптотическое распределение целых точек на некоторых эллипсоидах.** Малышев А. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. **1**, М., АН СССР, 1956, 7—8

Для трехмерных эллипсоидов, связанных с одним родом квадратичных форм, доказывается асимптотически равномерное в смысле эллиптической меры распределение целых точек на них. Ю. В. Л.

6126. **О числе представлений чисел формы $4^a(8b+7)$ в виде суммы четырех квадратов.** Сривастава (On the number of representations as sum of four squares of numbers of the form $4^a(8b+7)$. Srivastava Om Prakash), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1955—1956, **6**, № 2, 278—285 (англ.)

Подробно рассмотрен вопрос о числах $n=4^a(8b+7)$, имеющих три различных представления в виде суммы четырех квадратов. Далее даны все числа n, имеющие 1, 2, 3 или 4 таких представления.

Полученные результаты применены к целочисленным решениям многостепенных уравнений третьей степени

2-го, 3-го или 4-го порядка с 8 членами в каждой части.

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_8^n = \ldots = z_1^n + z_2^n + \ldots + z_8^n \ (n = 1, 2, 3).$$

Пример. Так как $31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2$, то, прибавив отрицательные члены, получим: $(5, 2, 1, 1, -5, -2, -1, -1)_3 = (3, 3, 3, 2, -3, -3 -3, -2)_3$. Увеличив каждое основание квадрата на $h = 6$, получим положительные решения: $11^n + 8^n + 7^n + 7^n + 5^n + 5^n + 4^n + 1^n = 9^n + 9^n + 9^n + 8^n + 4^n + 3^n + 3^n + 3^n$ $(n = 1, 2, 3)$.

В. А. Голубев

6127. **Об одном замечательном семействе целых алгебраических чисел, образующем замкнутое множество. Пизо** (Sur une famille remarquable d'entiers algébriques formant un ensemble fermé. Pisot Ch.), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955, CBRM. Liège—Paris, 1956, 77—83 (франц.)

Формулируется ряд известных теорем об алгебраических числах, все сопряженные которых меньше единицы по абсолютной величине. Отмечаются также применения этих чисел в теории тригонометрических рядов, найденные Салемом, при исследовании множеств единственности. И. И. Пятецкий-Шапиро

6128. **О сравнениях третьей степени по простому модулю. Манин Ю. И.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 5, 673—678

Дается элементарное доказательство теоремы Хассе о числе решений сравнения третьей степени $y^2 = x^3 + ax + b$ по простому модулю $p > 3$. Доказательство основывается на очень изящном подсчете степеней (относительно x) полиномов, находящихся в знаменателях X_n, где (X_n, Y_n) — точка на кривой $\tau_1^2 = \xi^3 + a\xi + b$, рассматриваемой в поле $k_0(x, y)$ (здесь k_0 — поле вычетов по модулю p, $y^2 = x^3 + ax + b$), получающаяся n-кратным добавлением точки (x, y) к точке (x^p, y^p).

Д. К. Фаддеев

6129. **Теория арифметики линейных преобразований и их приложение в элементарном доказательстве теоремы Дирихле о простых числах арифметической прогрессии. Ямамото** (Theory of arithmetic linear transformations and its application to an elementary proof of Dirichlet's theorem about the primes in an arithmetic progression. Yamamoto Koichi), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 266—267 (англ.)

Указывается возможность найти общую основу в классическом доказательстве и в доказательстве Сельберга (Selberg A., Ann. Math., 1949, 50, 297—304) теоремы Дирихле, применяя преобразования $S_\alpha(f(x)) = \sum_{n \leqslant x} \alpha_n f(x/n)$, порожденные разными последовательностями $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Доказательства отсутствуют. Э. К. Фогелс

6130. **Некоторые функции сумм. Коэн** (Some totient functions. Cohen Eckford), Duke Math. J., 1956, 23, № 4, 515—522 (англ.)

Пусть $\Phi_k(m)$ обозначает число тех натуральных чисел $n \leqslant m^k$, для которых (n, m^k) не делится на k-ю степень натурального числа > 1. Даются другие определения той же функции и доказывается их эквивалентность. Выводятся формулы

$$\Phi_k(m) = m^k \prod_{p \mid m} (1 - p^{-k}), \quad \sum_{d \mid m} \Phi_k(d) = m^k$$

и ряд более сложных тождеств, содержащих функцию Φ_k. Число решений сравнения

$$n \equiv a_1 x_1^k y_1 + \ldots + a_s x_s^k y_s \pmod{m^k}, \ (a_i, m) = 1$$

в числах $x_i \pmod m$, $y_i \pmod{m^k}$ выражается суммой $m^{k(s-1)} \sum d^k \Phi_s(m/d)$ по всем делителям $d \mid m$, для которых $d^k \mid n$. Э. К. Фогелс

6131. **Заметка о суммах Гаусса. Карлиц** (A note on Gauss's sum. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 910—911 (англ.)

Дается новый вывод известного равенства

$$\sum_{r=0}^{p-1} \exp(2\pi i r^2/p) = i^{(p-1)^2/4} \sqrt{p}, \qquad (1)$$

где $p > 2$ — простое число, основанный на некоторых результатах из теории деления круга. Автор отмечает, что простое доказательство тождества (1), полученное Эстерманом (Estermann T., J. London Math. Soc., 1945, 20, 66—67), распространяется на случай любого нечетного числа p. А. Ф. Лаврик

6132. **Однозначность разложения в некоторых кольцах квадратичных целых чисел. Русу** (Unicitatea descompunerii în anumite inele de întregi patratici. Rusu Eugen), Bul. stiint. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1956, 8, № 2, 273—295 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются законы разложения в кольцах I с числами $\omega = x + y\sqrt{D}$, где $D \equiv 2$ или $D \equiv 3 \pmod 4$ и свободно от квадратов. В. А. Голубев

6133. **О разложении квадратичных иррациональностей в непрерывную дробь. Джерасимович** (Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen. Djerasimović Božidar), Math. Z., 1956, 66, № 3, 228—239 (нем.)

Статья написана в новых обозначениях непрерывных дробей, введенных автором (РЖМат, 1956, 988). В этих обозначениях вводится в рассмотрение операция «|». Изучаются свойства этой операции. В конце статьи операция «|» применяется для определения допериодической части разложения квадратичной иррациональности по данному разложению сопряженной иррациональности.

В. Д. Подсыпанин

6134. **Одна проблема диофантовых приближений и характеристическое свойство квадратичных иррациональностей. I. Леккеркер** (Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà, caratteristica dei numeri quadratici. I. Lekkerkerker Cornelis Gerrit), Atti Accad. naz. Lincei Rend, Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 21, № 3—4, 179—185 (итал.)

Продолжение работы Куджани (РЖМат, 1956, 8548). Исследуется случай, когда последовательность приближений иррационального числа $\sqrt{\alpha}$ ограничена сверху. Доказываются 4 леммы и теорема 1: Если $\theta = \sqrt{\alpha}$ — квадратичная иррациональность, то производное множество $I'(\theta)$ дискретно. В. А. Голубев

6135. **Одна проблема диофантовых приближений и характеристическое свойство квадратичных иррациональностей. II. Леккеркер** (Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici. II. Lekkerkerker Gerrit Cornelis), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 21, № 5, 257—262 (итал.)

Доказаны две леммы и, в частности, теорема 2: Если множество $I'(\theta)$ дискретно, то θ — квадратичная иррациональность. Далее доказана теорема C первой части. В. А. Голубев

6136. **Частично ограниченные непрерывные дроби. Уолл** (Partially bounded continued fractions. Wall H. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1090—1093 (англ.)

Пусть $f(a)$ означает непрерывную дробь $[1, a_1, a_2, \ldots]$, где $\{a\}$ — последовательность комплексных чисел. Утверждение, что $f(a)$ частично ограничена, означает, что $\{a\}$ содержит некоторую ограниченную бесконечную подпоследовательность. Необходимым условием для сходимости частично ограниченной $f(a)$ является расходимость сумм $\Sigma|b_p|$, где $b_1 = 1$, $a_p = 1/b_p b_{p+1}$, $p = 1, 2, \ldots$ Непрерывная дробь $f(a)$, у которой $\Sigma|b_p|$ расходятся, является сходящейся при условии, что ее подходящие дроби с четным и нечетным числом членов абсолютно сходятся, т. е. при условии, что $\Sigma|f_{2p+2} - f_{2p}|$ и $\Sigma|f_{2p+1} - f_{2p-1}|$, где $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность приближений, сходятся.

Доказывается, что простая сходимость четных и нечетных частей $f(a)$, вместе с расходимостью $\Sigma|b_p|$, недостаточна для сходимости любой непрерывной дроби $f(a)$ (теорема 3), но достаточна в случае частично ограниченной $f(a)$ (теорема 2).

В. А. Голубев

6137. Представление квадратных корней из натуральных чисел полурегулярными непрерывными дробями. Пиппинг (Halbregelmässige Kettenbrüche für die Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen. Pipping Nils), Acta Acad. Abo., 1955, **20**, № 1, 9 pp. (нем.)

Для положительного целого D, не являющегося точным квадратом, автор указывает способ нахождения представления $\sqrt{D}$ особенной полурегулярной непрерывной дробью по его представлению регулярной непрерывной дробью. Отмечены некоторые свойства этих полурегулярных непрерывных дробей, и для $1 < D \leqslant 1000$ табулирована 101 такая полурегулярная непрерывная дробь, которая не является диагональной непрерывной дробью.

W. T. Scott

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 133.

6138. Об уравнении $3^x + 4^y = 5^z$. Серпинский (O równaniu $3^x + 4^y = 5^z$. Sierpiński W.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 194—195 (польск.)

Царанкевич поставил вопрос, имеет ли уравнение $3^x + 4^y = 5^z$ решения в натуральных числах x, y, z, кроме $x = y = z = 2$. Автор дает элементарное доказательство того, что таких решений не существует.

K. Zarankiewicz

6139. Некоторые замечания о числах Пифагора. Есьманович (Kilka uwag o liczbach pitagorejskich. Jesmanowicz L.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 196—202 (польск.)

Серпинский доказал (реф. 6138), что уравнение $3^x + 4^y = 5^z$ не имеет решений в натуральных числах, кроме решения $x = y = z = 2$. Этот результат предполагает следующие гипотезы:

(H). Для любых натуральных чисел a, b, c, x, y, z, если $a^2 + b^2 = c^2$ и $a^y + b^y = c^z$, $x = y = z = 2$.

Натуральные числа a, b, c, удовлетворяющие уравнению $a^2 + b^2 = c^2$, называются числами Пифагора, в частности, числа вида

$$a = 2n + 1, \quad b = 2n(n+1), \quad c = 2n(n+1) + 1, \quad (1)$$

где n — натуральное число, есть числа Пифагора. Для $n = 1$ имеем $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$; таким образом результат Серпинского утверждает, что гипотеза (H) справедлива для чисел (1), если $n = 1$. Элементарным способом автор доказывает, что гипотеза (H) справедлива для чисел (1), если $n = 2, 3, 4, 5$. Вопрос о том, справедлива ли гипотеза (H) для чисел (1), если $n > 5$, остается открытым.

K. Zarankiewicz

6140. О решении в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = z^2$. Давид (Sur l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$ en entiers. David M.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, **36**, № 180, 115—118 (франц.)

6141. О треугольниках Пифагора, имеющих равные площади. Серпинский (O trójkątach pitagorejskich mających jednakowe pola. Sierpiński W.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 163—168 (польск.)

Треугольником Пифагора называется прямоугольный треугольник, у которого длины сторон есть натуральные числа. Дано элементарное доказательство теоремы: если, по крайней мере, один из $n \geqslant 1$ треугольников Пифагора с разными гипотенузами и равными площадями имеет нечетную гипотенузу, тогда существуют $n + 1$ треугольников Пифагора с разными гипотенузами и равными площадями, из которых один имеет нечетную гипотенузу.

Эта теорема является обобщением одной из теорем Ферма. Даны примеры 3, 4 или 5 различных треугольников Пифагора с одной и той же площадью.

Далее доказывается, что для каждого натурального числа n существует n неконгруэнтных треугольников Пифагора: 1) с равными периметрами (примеры даны для $n = 2, 3$), 2) с одной и той же гипотенузой, 3) с одними и теми же катетами.

Автор упоминает, что Шедд определил в 1949 г. 64 неконгруэнтных треугольника Пифагора с одной и той же гипотенузой $2576450045 = 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53$.

K. Zarankiewicz

6142. О простых числах, для которых сумма делителей куба есть полный квадрат. Шинцель (O liczbach pierwszych, dla których suma dzielników sześcianu jest pełnym kwadratem. Schinzel A.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 203—204 (польск.)

6143. Об одном предположении относительно разложения на сумму трех квадратов. Шинцель (O pewnym przypuszczeniu dotyczącym rozkładów na sumę trzech kwadratów. Schinzel A.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 205 (польск.)

6144. О некоторых сумматорных формулах. Митринович (Sur quelques formules sommatoires. Mitrinovitch Dragoslav S. Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Ser.—Mat. i fiz., 1956, № 7, 8 p.) (франц.; рез. сербо-хорв.)

Устанавливается ряд формул для вычисления некоторых сумм, например

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{\binom{m}{k}}{(n+kp)^{\nu/s}} = \frac{1}{s^{\nu-1}(\nu-1)!} \int_0^1 t^{n-1}(1-t^s)^{\nu-1}(1-t^p)^m \, dt, \quad (1)$$

где положено

$$(n+kp)^{\nu/s} = \prod_{t=0}^{\nu-1} (n + kp + ts),$$

n, p и s — положительные числа, а $\nu \neq 1$ и m — натуральные числа. Частным случаем (1) является равенство

$$\sum_{k=0}^{m} \left\{ (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=1}^{\nu} [n + (i+k-1)p] \right\} =$$

$$= (\nu - m - 1)! \; [p^{\nu}(\nu-1)! \, (n/p)_{\nu+m}].$$

где

$$(n/p)_{\nu+m} = \prod_{t=0}^{\nu+m+1} [(n/p)+t].$$

Э. Апарисио

6145. Суммируемость рядов Дирихле и асимптотическая теория чисел. Рихерт (Summierbarkeit Dirichletscher Reihen und asymptotische Zahlentheorie. Richert Hans-Egon). Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège-Paris, 1956, 85—92 (нем.)

Перепечатано из Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, math.-phys., 1956.

6146. Гауссовы суммы. Блей (Gaussian sums. Blij F. van der), Euclides, Groningen **30** (1954/55), 293—298 (нем.)

6147 К. Введение в теорию чисел. Виноградов (An introduction to the theory of numbers. Vinogradov I. M., Translated by H. Popova. Pergamon Press, London and New York, 1955, vi, 155 pp., 1.75 doll; 12 sh. 6d) (англ.)

Перевод книги автора «Основы теории чисел», 6-е издание, М., Гостехиздат, 1952.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 13.

См. также: 6584, 6604

АЛГЕБРА

6148 К. Алгебра и ее применение. Т. 2. Гров (Algebra and its use. Vol. 2. Grove Ethel L. et al. Amer. Book, 1956, 542 pp., ill., 3.40 doll.); Cumul. Book Index, 1956, **59**, № 9, 51 (англ.)

1 МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

6149. О границах корней многочленов. Фаринья (Sur les limites des zéros d'un polynôme. Farinha João. Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. Ci. Mat., 1954, (2) **3**, 181—186 (франц.)

С помощью разложения функции $1/f(z)$ в непрерывную дробь найдены условия, достаточные для того, чтобы многочлен $f(z)$ не имел корней в данной области.

E. Frank

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 244.

6150. Явное решение некоторых трехчленных уравнений в терминах экстремальных операций. Беллман (On explicit solutions of some trinomial equations in terms of the maximum operation. Bellman Richard), Math. Mag., 1956, **30**, № 1, 41—44 (англ.)

Показывается, что положительный корень уравнения $x^n + ax = b$, где a, $b \geqslant 0$, равен

$$\min_{u \geqslant 0} \left[\frac{b + (n-1)\left(\frac{u}{n}\right)^{n/(n-1)}}{a \cdot u} \right],$$

если $n > 1$, и

$$\max_{u \geqslant 0} \left[\frac{b \quad (1-n)\left(\frac{u}{n}\right)^{n/(n-1)}}{1 + au} \right],$$

если $0 < n < 1$.

В. С. Новоселов

6151. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Сводка методов и их сравнение. Покорная (Řešení soustav lineárních algebraickych rovnic přehled a srovnani metod. Pokorna Olga), Stroje zpracov. inform., 1955, № 3, 139—196 (чешск.; рез. русск., англ.)

6152. Практическое определение ранга матрицы. Конкрайт (Practical determination of the rank of a matrix. Conkwright N. B.), Math. Teacher, 1956, **49**, № 5, 344—346 (англ.)

Предлагается вычислять ранг матрицы, составляя матрицу, элементами которой являются все миноры второго порядка, окаймляющие некоторый отличный от нуля элемент, и повторяя этот процесс до тех пор пока не получится нулевая матрица или не исчерпаются строки или столбцы. Номер последней ненулевой матрицы будет равен рангу данной матрицы.

Д. К. Фаддеев

6153. Симметрические матрицы, квадратичные формы и линейные связи. Африат (Symmetric matrices, quadratic forms and linear constraints. Afriat S. N.), Publs mat., 1954, **3**, № 3—4, 305—308 (англ.)

Доказано, что квадратичная форма $x'Ax$ (где A — симметрическая $n \times n$-матрица, а x — n-мерный вектор) тогда и только тогда положительно определена относительно линейных связей $U'x = 0$ (где U — произвольная $n \times m$-матрица), когда для всех достаточно больших λ форма $x'(A - \lambda UU')x$ положительно определена. Если первые m строк матрицы U линейно независимы, то это условие равносильно следующему:

$$(-1)^r \begin{vmatrix} 0 & U'_r \\ U_r & A_r \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{для всех } r = m+1, \ldots, n),$$

где A_r — квадратная подматрица матрицы A, образованная ее первыми r строками и столбцами, а U_r — прямоугольная подматрица матрицы U, образованная ее первыми r строками.

Получены также и другие результаты, среди которых отметим следующий: если форма $x'Ax$ определена относительно связей $U'x = 0$ и λ_0 — наименьший корень уравнения $|A - \lambda UU'| = 0$, то форма $x'(A - \lambda^* UU')x$ положительно определена для всех $\lambda^* < \lambda_0$.

А. Ф. Голубчиков

6154. О границах вещественных характеристических чисел матриц с вещественными элементами. Медлин (On limits of the real characteristic roots of matrices with real elements. Medlin Geńe W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 5, 912—917 (англ.)

Неравенства Брауера (РЖМат, 1954, 5451; 1956, 2780) уточняются для случая вещественных матриц. Основной результат: каждое вещественное характеристическое число z вещественной матрицы $A = \|a_{\alpha\beta}\|$ удовлетворяет по меньшей мере одному из $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений:

$$\left|(z - a_{\alpha\alpha})(z - a_{\beta\beta}) - a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}\right| \leqslant Q'_{\alpha\beta}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha \neq \beta),$$

где

$$Q'_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta} + \sum_{\nu=1;\ \nu<\mu;\ \nu,\ \mu=\alpha,\ \beta}^{n} \left| a_{\alpha\nu}a_{\beta\mu} + a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu} \right|,$$

$$M_{\alpha\beta} = \max\left\{M^*_{\alpha\beta},\ m^*_{\alpha\beta}\right\},$$

$$M^*_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1;\ \nu\neq\alpha,\ \beta}^{n} \left| a_{\alpha\beta}a_{\beta\nu} + a_{\beta\alpha}a_{\alpha\nu} \right|,$$

$$m^*_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1,\ \nu\neq\alpha,\ \beta}^{n} \left| a_{\beta\alpha}a_{\alpha\nu} - a_{\alpha\beta}a_{\beta\nu} \right|,$$

$$W_{\alpha\beta} = \max\left\{W^*_{\alpha\beta},\ w^*_{\alpha\beta}\right\},$$

$W^*_{\alpha\beta}$ — сумма положительных и $w^*_{\alpha\beta}$ — сумма отрицательных чисел вида $a_{\alpha\nu}a_{\beta\nu}$, $\nu \neq \alpha, \beta$.

В. С. Новоселов

6155. Суммы элементов строк для обратной матрицы. II. Виланский (The row-sums of the inverse matrix. II. Wilansky Albert), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 9, 652—653 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1957, 561. Выяснено, что на бесконечные матрицы не распространяется следующее свойство конечных квадратных матриц: Если $AB = E$, где E — единичная матрица, а в матрице A сумма элементов каждой строки равна s, то для матрицы B каждая такая сумма равна $1/s$. Ф. Р. Гантмахер

6156. Обобщенные коммутаторы матриц и перестановки множителей в произведении трех матриц. Таусски (Generalized commutators of matrices and permutations of factors in a product of three matrices. Taussky Olga), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 67—68 (англ.)

Доказано, что для любых двух неособенных комплексных $n \times n$-матриц X и Y с равными определителями существуют такие две неособенные $n \times n$-матрицы C и D, что

$$X = C^{-1}D^{-1}YCD.$$

Кроме того, доказано, что для двух неособенных матриц X и Y тогда и только тогда существуют такие три неособенные матрицы A_1, A_2, A_3, что $X = A_1A_2A_3$ и $Y = A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$, где i_1, i_2, i_3 — произвольная нециклическая перестановка индексов (1, 2, 3), когда $|X| = |Y|$. (О случае, когда i_1, i_2, i_3 — циклическая перестановка, см., например, РЖМат, 1953, 71).

Е. Г. Шульгейфер

6157. К вопросу о характеристических корнях матриц. Хилман (On a matrix characteristic value problem. Hillman A. P.), J. Aeronaut. Sci., 1956, **23**, № 3, 286 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}y_i = \lambda\left(y_i + \sum_{j=1}^{n} c_jy_j\right) \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где d_{ij} и c_j — известные постоянные, причем $\sum_{j=1}^{n} c_j \neq -1$, а λ — неизвестный параметр. Доказано, что система (1) тогда и только тогда имеет нетривиальные решения, когда λ является характеристическим корнем матрицы (a_{ij}), где $a_{ij} = d_{ij} - c_j\left(1 + \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n} d_{ik}$.

А. Ф. Голубчиков

6158 К. О решении уравнений высших степеней (метод Штурма). Шафаревич Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (Sturmsche Methode). Schafarewitsch J. R. — Ein Anhang: Das Hornersche Schema. Karl H. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 29 S., ill.) (нем.)

См. РЖМат, 1956, 6397К.

6159 К. Определители и матрицы. Эйткен (Determinants and matrices. 9th ed. Aitken Alexander Craig. Edinburgh—London, Oliver and Boyd; New York, Interscience, 1956, vii, 144 pp., 7 sh 6 d.) (англ.) Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 375, 10

ГРУППЫ

6160. Два способа рассмотрения подстановок. Деам (Deux manières d'envisager les substitutions. Deham e M. E.), Rev. math. spéc., 1956, **67**, № 5, 429—430 (франц.)

6161. О числе автоморфизмов конечной группы. Грин (On the number of automorphisms of a finite group. Green J. A.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A 237**, № 1211, 574—581 (англ.)

Ледерман и Нейман (РЖМат, 1956, 8600) показали, что для любого простого числа p существует такая функция $g(h) \leqslant (h-1)^3 p^{n-1} + h$, что p^h делит порядок группы автоморфизмов группы G, если $p^{g(h)}$ делит порядок группы G. Автор доказывает, что $g(h) \leqslant \frac{1}{2}h(h+3) + 1$.

С. Д. Берман

6162. О прямом произведении S-функций. Какар (On the inner product of S-functions. Kakar A. G.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 485—490 (англ.)

На основании результатов Литлвуда (РЖМат, 1956, 8599) получены таблицы разложения прямого произведения неприводимых представлений $\{n-4,\ (\lambda)\} \circ \{n-4,\ (\mu)\}$ (где (λ) и (μ) — разбиения числа 4) симметрической группы S_n в сумму неприводимых представлений.

С. Д. Берман

6163. Топологизация группы бесконечных подстановок. Маурер (Topologizarea grupului de permutări infinite. Maurer I.), Bul. stiint. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1956, **8**, № 2, 265—272 (рум.; рез. русск., нем.)

Пусть S_∞ — множество всех подстановок счетной степени. Подстановка $\pi \in S_\infty$ является пределом последовательности $\{\pi_r\}_{r=1}^{\infty}$ подстановок $\pi_r \in S_\infty$, если для каждого натурального n существует такое число R_n, что $\pi_r(n) = \pi(n)$ при $r > R_n$. Относительно таким образом введенной топологии группа S_∞ является топологической группой (эта топологическая группа обозначается через S^t_∞). Доказывается, что группа S^t_∞ проста и любой ее автоморфизм является внутренним. Множество всех подстановок, сдвигающих лишь конечное число элементов, плотно в S^t_∞. Л. М. Глускин

6164. Об абелевых группах без кручения с наследственными последовательностями образующих. Лось (On the torsion-free Abelian groups with hereditarily generating sequences. Łoś J.), Bull. Acad. Polon. Sci. 1956, Cl. 3, **4**, № 4, 169—171 (англ.); Бюлл. Польской АН, 1956, Отд. 3, **4**, № 4, 165—167

Счетная система образующих абелевой группы называется наследственной, если любая ее бесконечная подсистема также является системой образующих. Доказывается, что абелева группа без кручения обладает наследственной системой образующих, если ранг группы конечен и группа не имеет конечных нецикли-

ческих гомоморфных образцов. Сообщается, что в еще не опубликованной работе автора, Соисяда и Сломинского доказано также и обратное утверждение.

Доказательство основывается на следующей лемме: Абелева группа без кручения конечного ранга обладает не более чем счетным числом относительно максимальных подгрупп (подгруппа) H группы G называется относительно максимальной, если фактор-группа G/H является примарной циклической или квазициклической группой).

6165. **О локально разрешимых группах конечного ранга. Чарин В. С.,** Матем. сб., 1957, 41, № 1, 37—48

Изучаются свойства локально разрешимых групп конечного ранга (т. е. локально разрешимых групп, каждая подгруппа которых с конечным множеством образующих имеет систему образующих с числом элементов, не превосходящим некоторого общего для всех таких подгрупп числа). Оказывается, что: 1) любая локально разрешимая группа конечного ранга обладает локально нильпотентным нормальным делителем, фактор-группа по которому разрешима; 2) локально разрешимая группа без кручения конечного ранга разрешима; 3) любая локально разрешимая группа конечного ранга, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых периодических подгрупп, разрешима и обладает периодическим нормальным делителем, удовлетворяющим условию минимальности для подгрупп, фактор-группа по которому имеет тип A_4 (т. е. обладает нормальным рядом конечной длины, все факторы которого являются абелевыми группами конечного ранга с конечными периодическими частями); 4) любая локально разрешимая группа конечного ранга, не имеющая подгрупп конечного индекса, нильпотентна.

Кроме того, изучаются группы, обладающие рациональным рядом конечной длины. Установлены некоторые свойства рациональных рядов, общие для всех рациональных рядов одной и той же группы (т. е. зависящие только от свойств самой группы) и связанные с понятием π-полноты группы (Черников С. Н., Матем. сб., 1948, 22(64), 397—422).

С. Н. Черников

6166. **Алгебраические группы над конечными полями. Ланг** (Algebraic groups over finite fields. Lang Serge), Amer. J. Math., 1956, 78, № 3, 555—563 (англ.)

Пусть k — конечное поле с q элементами и G — алгебраическая группа над полем k. Для любой точки $x \in G$ через $x^{(q)}$ обозначается точка, координаты которой являются q-ми степенями соответствующих координат точки x. Доказывается, что относительно операции $y \to x^{(q)} y x^{-1}$ (x, $y \in G$) множество G является однородным пространством с действующей на нем группой G. Используя этот факт, а также некоторые свойства отображения $x \to x^{(q)} x^{-1}$ множества G на себя, автор доказывает, что любое однородное пространство G/H группы G имеет рациональные точки. Если g — подгруппа рациональных точек группы G, то G и G/g имеют одинаковое число рациональных точек. Получены также некоторые другие результаты, в том числе новое доказательство одной теоремы Шатле (Châtelet F., C. r. Acad. sci., 1947, 224, 1616—1618).

В. М. Глушков

6167. **Резольвенты некоторых линейных групп над конечным полем. Карлиц** (Resolvents of certain linear groups in a finite field. Carlitz L.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 4, 568—579 (англ.)

Пусть Γ — группа всех преобразований вида

$$x' = (ax + b) / (cx + d),$$

где a, b, c, $d \in GF(q) = F_q$, $q = p^n$, p — простое, $ad - bc = 1$. Положим

$$i(x) = (L^{q-1} + 1)^{\frac{1}{2}(q+1)} L^{-\frac{1}{2}(q^2-q)},$$

если $p > 2$, и $i(x) = (L^{q-1} + 1)^{q+1} L^{-(q^2-q)}$, если $p = 2$, где $L = x^q - x$.

Доказано, что уравнение $i(x) = y$ над полем рациональных функций $F_q(y)$ нормально и его группа Галуа изоморфна группе Γ. При $q = 4$, 5, 7, 9, 11 для этого уравнения строятся резольвенты.

Д. А. Супруненко

6168. **Представления конечных линейных групп. Стейнберг** (Prime power representations of finite linear groups. Steinberg Robert), Canad. J. Math., 1956, 8, № 4, 580—591 (англ.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — одна из следующих пяти линейных групп, действующих в пространстве над конечным полем характеристики p: специальная проективная, симплектическая, унитарная, первая и вторая ортогональная. Доказано, что группа $\mathfrak{G}$ обладает неприводимым представлением степени d над любым полем, характеристика которого равна нулю либо взаимно проста с m, где d — порядок p-подгруппы Силова группы $\mathfrak{G}$, а m — индекс ее нормализатора. Д. А. Супруненко

6169. **Об арифметических инвариантах. Метраль** (Sur les invariants arithmétiques. Métral Paul), Ann. Fac. sci. Marseille, 1953, 22, № 2, 101—115 (франц.)

Обзор результатов Гекке, Петерсена и Клостермана, о построении автоморфных форм для модулярной группы, ее конгруэнц-подгрупп и модулярной группы Гильберта. Изложены также некоторые результаты Петерсена об автоморфных формах для любых фуксовых групп 1-го рода. И. И. Пятецкий-Шапиро

6170. **Ортогональные группы в четырехмерном пространстве. Тамакава** (4次元直交羣について。玉河恒夫), 數學, Сугаку, 1955, 7, № 1, 24—25 (японск.)

Краткая заметка. Пусть Q — невырожденная симметрическая матрица порядка 4 над полем K характеристики $\neq 2$. Автор рассматривает группу $O_4(K, Q)$ всех матриц T, удовлетворяющих соотношению $TQT' = Q$, и с помощью алгебры Клиффорда устанавливает ее эквивалентность с другими типами классических групп. Хуа Ло-ген

6171. **Характеризация регулярных полугрупп. Исэки** (A characterisation of regular semi-group. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 9, 676—677 (англ.)

Доказано, что полугруппа S тогда и только тогда регулярна (см., например, РЖМат, 1957, 166), когда для любого ее правого идеала A и любого левого идеала B справедливо равенство $AB = A \cap B$. В частности, коммутативная полугруппа тогда и только тогда регулярна, когда каждый ее идеал идемпотентен. А. И. Ширшов

6172. **Структура нормальных инверсных полугрупп. Престон** (The structure of normal inverse semigroups. Preston G. B.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 3, № 1, 1—9 (англ.)

Пусть N — инверсная полугруппа (РЖМат, 1957, 167), являющаяся объединением непересекающихся инверсных полугрупп N_α, E_α — множество всех идемпотентов полугруппы N_α и E — множество всех идемпотентов полугруппы N. Доказано, что N тогда и только тогда является полуструктурой полугруппы N_α, когда E является полуструктурой полугруппы E_α (РЖМат, 1956, 1106). Доказано также, что полуструктура инверсных полугрупп всегда является инверсной полугруппой. Дано полное описание полуструктуры

инверсных полугрупп, обобщающее результаты Клиффорда для полуструктуры групп (Clifford A. H., Ann. Math., 1941, 42, № 4, 1037—1049; Алгебраический реферативный сборник, М., Изд-во ин. лит., 1948, вып. III). Л. М. Глускин

6173. **Существование наибольшего разложения полугруппы. Тамура, Кимура** (Existence of greatest decomposition of a semigroup. Tamura Takayuki, Kimura Naoki), Kodai Math. Sem. Repts, 1955, 7, № 3—4, 83—84 (англ.)

Пусть D — система всех эквивалентностей α между элементами полугруппы T, выдерживающих умножение в T и удовлетворяющих при любых $x_i \in T$ соотношениям

$$f_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv g_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) \pmod{\alpha}, \quad (1)$$

где $f_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторые слова от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказывается, что D является полной структурой и, следовательно, существует наиболее дробное разложение T на классы взаимно эквивалентных элементов, удовлетворяющее соотношениям (1) (РЖМат, 1956, 1104). Л. М. Глускин

6174. **О двух представлениях конечных полугрупп. Шютценбергер** (Sur deux représentations des demi groupes finis. Schützenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 19, 1385—1387 (франц.)

Пусть Σ — полугруппа всех отображений конечного множества E в себя, $P(E)$ — множество всех подмножеств E. Каждое отображение $\sigma \in \Sigma$ может быть естественным образом продолжено до отображения множества $P(E)$ в себя. Для любого $\sigma \in \Sigma$ существует единственное «обратное» отображение σ' множества E в себя: $\sigma' x$ есть объединение всех $y \in P(E)$ таких, что $\sigma y \subset x$. Каждое отображение σ определяет две квадратные матрицы $S(\sigma) = S_{xy}(\sigma)$ и $S'(\sigma) = S'_{xy}(\sigma)$ с индексами из $P(E)$: $S_{xy}(\sigma) = 1$, если $\sigma x = y$; $S_{xy}(\sigma) = 0$, если $\sigma x \neq y$, $S'_{xy}(\sigma) = 1$, если $x = \sigma' y$; $S'_{xy}(\sigma) = 0$, если $x = \sigma' y$.

Автор находит базис модуля всех квадратных матриц B с индексами из $P(E)$, для которых при любом $\sigma \in \Sigma$ $S(\sigma) B = BS'(\sigma)$. Л. М. Глускин

6175. **Идеалы в компактных связных полугруппах. Уоллес** (Ideals in compact connected semigroups. Wallace Alexander Doniphan), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1956, A59, № 5, 535—539; Indagationes math., 1956, 18, № 5, 535—539 (англ.)

Пусть S — произвольный моб (РЖМат, 1956, 1108, 1203), $J(a)$ — главный идеал, порожденный элементом $a \in S$; J_a — множество всех образующих идеала $J(a)$; $I(a) = J(a) \setminus J_a$ и $J_0(A)$ — объединение всех идеалов моба S, содержащихся в множестве $A \subset S$. Доказано, что множество $I(a)$, если оно не пусто, является идеалом моба S. Между идеалами $I(a)$ и $J(a)$, а также между идеалами $J_0(S \setminus a)$ и $J_0(S \setminus a) \cup J(a)$ не существует никаких идеалов. Идеал $J_0(A)$ для замкнутого множества A замкнут. Если моб S компактен, то идеал $J_0(A)$ для открытого множества A открыт. Если моб S является локально связным континуумом, то для любого собственного связного идеала A моба S существует максимальный связный собственный идеал, содержащий идеал A (РЖМат, 1956, 1108). Имеются и другие аналогичные результаты.

Если моб S является континуумом, для которого не существует разбивающих его ретрактов, то для любой его максимальной подгруппы H_e с единицей e, не содержащейся в минимальном идеале моба S, из того, что некоторое замкнутое подмножество группы H_e разбивает S, следует, что H_e разбивает S на две компоненты, $I(e)$ и $S \setminus J(e)$, причем $I(e) = J(e) = eS$, элемент e содержится в центре моба S и $H_e = J_e$ является границей компоненты $I(e)$. Если моб S компактен и для любого непрерывного преобразования каждого его собственного ретракта существует неподвижная точка, то либо моб S является группой, либо его минимальный идеал состоит из идемпотентов. Если моб S гомеоморфен n-мерной сфере и некоторое подмножество его максимальной подгруппы H_e разбивает S, то группа H_e является группой Ли и неприводимо разбивает моб S. Л. М. Глускин

6176. **О сдвигах полугруппы. Тамура** (On translations of a semigroup. Tamura Takayuki), Kodai Math. Sem. Repts, 1955, 7, № 3—4, 67—70 (англ.)

Отображение φ полугруппы S в себя называется правым сдвигом, если $\varphi(xy) = x\varphi(y)$ для любых $x, y \in S$. Правый сдвиг φ полугруппы S называется внутренним, если существует такой элемент $a \in S$, что $\varphi(x) = xa$ для любого элемента $x \in S$. Доказано, что отображение φ полугруппы S в себя тогда и только тогда является ее правым сдвигом, когда оно переместимо с любым внутренним левым сдвигом. Образом и полным прообразом правого идеала полугруппы S при правом сдвиге является ее правый идеал. Подполугруппа R всех правых внутренних сдвигов является правым идеалом полугруппы Ф всех правых сдвигов. Если R является гомоморфным образом полугруппы Ф, то $R = \Phi$. Это возможно тогда и только тогда, когда полугруппа S обладает правой единицей. Полугруппа Ф тогда и только тогда изоморфна полугруппе S, когда S обладает единицей. Кроме того, при помощи полугрупп сдвигов дана характеристика полугрупп со следующими законами умножения: 1) $xy = y$ и 2) $xy = 0$ для любых $x, y \in S$. Наконец, замечено, что для любого правого сдвига φ полугруппа S является полугруппой и относительно действия $x \circ y = \varphi(x) y$. Л. М. Глускин

6177. **Обобщение теоремы Шварца о полугруппах. Исэки** (Generalisation of a theorem by S. Schwarz on semigroup. Iséki Kiyoshi), Portugaliae math., 1956, 15, № 1—2, 71—72 (англ.)

Доказано, что во всякой гомогруппе S (РЖМат, 1953, 117) существует идемпотент, делящийся на любой другой идемпотент (РЖМат, 1956, 5122; 1957, 1182). Л. М. Глускин

6178. **Фундаментальные теоремы о гомоморфизмах группоидов. Сагастуме-Берра** (Los teoremas fundamentales del homomorfismo para grupoides. Sagastume Berra A. E.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fis. argent., 1955, 17, 205—212 (исп.)

Доказываются элементарные теоремы о гомоморфизмах полугрупп с нулем и единицей (автор называет их группоидами), аналогичные соответствующим теоремам теории групп. Л. М. Глускин

6179 К. **Теория групп. Т. I. Курош** (The theory of groups. Vol. I. Kurosh A. G. Translated and edited by K. A. Hirsch. Chelsea Publishing Co., New York, N. Y., 1955, 272 pp., 4.95 doll.) (англ.)

Перевод первых двух глав второго русского издания (РЖМат, 1955, 3091). Переводчик пополнял список литературы и написал добавления, в которых комментируются некоторые вопросы, затронутые в тексте. Кроме того, в тексте исправлены опечатки и сделаны некоторые незначительные изменения.

Перевод из Math. Revs, 17, № 2, 124.

6180 Д. **Ядра аналитических групп и алгебр Ли. Маколи** (Analytic group kernels and Lie algebra kernels. Macauley Ronald Alvin. — Doct.

diss. Univ. Illinois, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2228—2229 (англ.)

Автореферат диссертации. H-ядром, где H — аналитическая группа, называется пара (K, f), состоящая из аналитической группы K и гомоморфизма f группы H в фактор-группу $A(K)/I(K)$ группы аналитических автоморфизмов $A(K)$ группы K по группе внутренних автоморфизмов $I(K)$. Пусть H^* — универсальная накрывающая группы H и $h: H^* \to H$ — накрывающий гомоморфизм. Ядро (K, f) называется аналитическим, если существует такое аналитическое отображение f_0: $H^* \to A(K)$, что $pf_0 = fh$, где p — естественный гомоморфизм $A(K) \to A(K)/I(K)$. Для аналитического H-ядра K гомоморфизм f индуцирует некоторый гомоморфизм $d: H \to A(C)$, где C — центр группы K. Аналитические H-ядра, имеющие одну и ту же тройку (C, H, d), обычным образом разбиваются на классы эквивалентности, составляющие абелеву группу $\mathrm{Ker}(C, H, d)$. Условие аналитичности позволяет ввести в алгебре Ли K' группы K структуру H'-ядра, где H' — алгебра Ли группы H. Если группа H односвязна, то соответствующая группа $\mathrm{Ker}(C', H', d')$ изоморфна группе $\mathrm{Ker}(C, H, d)$. Для любого аналитического гомоморфизма r аналитической группы L на группу H изучается естественный гомоморфизм группы $\mathrm{Ker}(C, H, d)$ в группу $\mathrm{Ker}(C, L, dz)$. В частности, указывается, что группу L всегда можно подобрать таким образом, чтобы этот гомоморфизм был тривиальным. Кроме того, описывается строение группы $\mathrm{Ker}(C, H, d)$ в том случае, когда C разлагается в прямое произведение двух H-подгрупп.

А. Л. Онищик

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

6181. О теореме существования обобщенной локальной теории полей классов. Гуань Цзи-вэнь (關於廣義局部類域論之存在定理. 管紀文), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, 301—303 (кит.; рез. англ.)

Доказано, что мультипликативная группа регулярного поля, содержащего корень p-й степени из 1 (где p — простое число), поле классов вычетов которого несчетно, содержит подгруппу конечного индекса, не составляющую поля классов. Б. М. Уразбаев

6182. О композите алгебраически замкнутых подполей. Абхьянкар (On the compositum of algebraically closed subfields. Abhyankar Shreeram), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 905—907 (англ.)

На примере поля формальных степенных рядов показано, что композит всех алгебраически замкнутых подполей некоторого поля K может не быть алгебраически замкнутым. Однако если K является конечным расширением алгебраически замкнутого поля k, то все алгебраически замкнутые подполя поля K лежат в k и, следовательно, их композит совпадает с k, т. е. алебраически замкнут. Б. М. Уразбаев

6183. Обобщенная локальная теория полей классов. III. Вторая форма теоремы существования. Строение аналитических групп. Уэйплс (Generalized local class field theory. III. Second form of existence theorem. Structure of analytic groups. Whaples G.), Duke Math. J., 1954, 21, № 4, 575—581 (англ.)

Продолжение серии работ автора по обобщенной локальной теории полей классов (РЖМат, 1955, 3644; 1956, 2010). Доказывается, что подгруппа a мультипликативной группы локального поля k, имеющая ведущий модуль π^{c+1}, тогда и только тогда аналитична, когда в неразветвленном дискретно нормированном поле $\mathfrak{K}$ с тем же полем классов вычетов, что и поле k, существуют такие элементы $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, что $\max|\alpha_\nu| = 1$ и для любого $i = 1, \ldots, c$ все элементы вида $E((\alpha_0 + \alpha_1 P + \ldots + \alpha_n P^n)\xi, \pi^i)$, где $\xi \in \mathfrak{K}$, а P — автоморфизм поля $\mathfrak{K}$, индуцирующий в поле классов вычетов возведение в степень p (p — характеристика поля классов вычетов поля k), принадлежат группе a. Определение функции $E(\alpha, \pi^i)$ для случая, когда характеристика поля k равна нулю, было дано референтом (Матем. сб., 1951, 26, № 1). В случае поля ненулевой характеристики эта функция определяется аналогично. И. Р. Шафаревич

6184. Обобщенная локальная теория полей классов. IV. Мощности. Уэйплс (Generalized local class field theory. IV. Cardinalities. Whaples G.), Duke Math. J., 1954, 21, № 4, 583—586 (англ.)

Продолжение (см. реф. 6183). В предположении, что локальное поле k регулярно и мощность $\aleph$ его поля классов вычетов бесконечная, доказывается, что мультипликативная группа поля содержит $\aleph$ аналитических подгрупп конечного индекса. Подсчитываются также мощности множеств подгрупп некоторых других типов. И. Р. Шафаревич

6185. Развитие ассоциативной алгебры и алгебраической теории чисел. Вандивер, Уивер (A development of associative algebra and algebraic theory of numbers. IV. Vandiver H. S., Weaver M. W.), Math. Mag., 1956, 30, № 1, 1—8 (англ.)

Продолжение предыдущих работ авторов под тем же заглавием (РЖМат, 1955, 3615). Изучаются свойства числовых полугрупп (аддитивных и мультипликативных) и числовых полуколец. В частности, рассматриваются кольца эндоморфизмов аддитивных числовых полугрупп и теорема о гомоморфизмах числовых колец (и полуколец). На этой основе дается аксиоматика абстрактных полуколец (7 аксиом). Б. М. Уразбаев

6186. Об одной теореме существования в теории алгебраических чисел. Шафаревич (On an existence theorem in the theory of algebraic numbers. Šafarevič I. R.), Amer. Math. Soc. Translat. 1956, 4, 143—150 (англ.)

Перевод из Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, 327—354 (РЖМат, 1955, 2085).

6187. О частных примарных идеалах в бесконечном поле алгебраических чисел. Накано (Über den Primäridealquotienten Unendlichen algebraischen Zahlkörper. Nakano Noboru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, A18, № 3, 257—269 (нем.)

Рассматриваются примарные идеалы, принадлежащие одному и тому же простому идеалу $\mathfrak{p}$ главного порядка $\mathfrak{O}$ бесконечного поля алгебраических чисел $\mathfrak{q}$, являющегося объединением возрастающей последовательности конечных алгебраических расширений $\mathfrak{K}$ поля рациональных чисел. Используя результаты своих предыдущих работ, особенно результаты работы о подразделении всех примарных идеалов, принадлежащих одному простому идеалу $\mathfrak{p}$ главного порядка $\mathfrak{O}$, на четыре рода примарных идеалов (J. Sci Hirosima Univ., 1954, 17, № 3), автор исследует вопросы о частном $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ двух примарных идеалов $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}'$, принадлежащих простому идеалу $\mathfrak{p}$, и о необходимых и достаточных условиях, при которых для данных двух примарных идеалов $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}'$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$, существует такой третий идеал $\mathfrak{q}''$, что $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ (в этом случае идеал $\mathfrak{q}'$ называется множителем идеала $\mathfrak{q}$). Получены следующие основные результаты:

1. Множество примарных идеалов, принадлежащих к одному простому идеалу $\mathfrak{p}$ главного порядка $\mathfrak{O}$, упорядочено по включению.

2. Пусть $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}'$ — два примарных идеала, принадлежащих к простому идеалу $\mathfrak{p}$, и пусть $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$,

$\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}^{e_\nu}$, где $\mathfrak{O}_\nu$ — главный порядок алгебраического расширения $\mathfrak{K}_\nu$. Тогда, если при некотором ν для всех $\lambda>\nu$ справедливо неравенство $(e_\nu-e'_\nu)\,h_{\nu+1}h_{\nu+2}\ldots h_\lambda\geqslant e_\lambda-e'_\lambda$ ($h_{\nu+1}h_{\nu+2}\ldots h_\lambda$ — наибольшая степень простого идеала $\mathfrak{p}_\lambda$ главного порядка $\mathfrak{O}_\lambda$, делящаяся на идеал $\mathfrak{p}_\nu=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu$), то $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'=\bar{\mathfrak{q}}$, где $\bar{\mathfrak{q}}=\left\{\ldots,\ \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}:\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu},\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}:\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}},\ldots,\ \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}:\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda},\ldots\right\}$, причем $\bar{\mathfrak{q}}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-e'_\nu}$ для всех ν, начиная с некоторого ν. Если же при любом ν существует такое $\lambda>\nu$, что $(e_\nu-e'_\nu)\,h_{\nu+1}\ldots h_\lambda<e_\lambda-e'_\lambda$, то $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q}=\left\{\ldots,\ \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}:\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu},\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1}:\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}},\ldots,\ \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1}:\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda},\ldots\right\}$ и $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-e_{\nu+1}}$ для всех ν, начиная с некоторого.

3. Пусть $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}'$ — примарные идеалы, принадлежащие простому идеалу $\mathfrak{p}$, причем $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}'$. Тогда, если $\mathfrak{q}$ является примарным идеалом первого, третьего или четвертого рода, то $\mathfrak{q}'$ всегда будет множителем идеала $\mathfrak{q}$; если же $\mathfrak{q}$ — примарный идеал второго рода, то $\mathfrak{q}'$ тогда и только тогда будет множителем идеала $\mathfrak{q}$, когда $\mathfrak{q}'$ также является примарным идеалом второго рода. Если $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, то либо $\mathfrak{q}''=\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$, либо $\mathfrak{q}''=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')\,\mathfrak{p}$, либо $\mathfrak{q}''=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{p}$. Равенство $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}\mathfrak{q}''$ при $\mathfrak{q}'\neq\mathfrak{q}''$ возможно тогда и только тогда, когда один из множителей, например $\mathfrak{q}'$, является примарным идеалом третьего рода, а второй множитель $\mathfrak{q}''$ является примарным идеалом второго рода и $\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}''\mathfrak{p}$.

Е. Г. Шульгейфер

6188. Опыт теории о. н. д. и о. н. к., основанной на методах современной алгебры. Фрибур (Essai d'une théorie du P. G. C. D. et du P. P. C. M., inspiré par les méthodes de l'algébre moderne. F r i b o u r g), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1957, **36**, № 183, 185—187 (франц.)

Элементарные свойства наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного целых чисел излагаются с помощью понятия идеала.

6189. Сопряженные элементы в телах. Херштейн (Conjugates in division rings. H e r s t e i n I. N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 6, 1021—1022 (англ.)

Обобщая теорему Веддербарна о коммутативности конечных тел, автор доказывает, что элемент тела, не лежащий в центре, имеет бесконечно много сопряженных элементов. А. И. Ширшов

6190. Разложение полупростых колец. Голди (Decompositions of semi-simple rings. G o l d i e A l f r e d W i l l i a m), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 23—24 (англ.)

См. РЖМат, 1957, 1198.

6191. Бирегулярные кольца. Андрунакиевич В. А., Матем. сб., 1956, **39**, № 4, 447—464

Ассоциативное кольцо R называется бирегулярным (B-кольцом), если всякий его главный идеал порождается центральным идемпотентом. Оказывается, что полное матричное кольцо над R бирегулярно одновременно с R. Если B-кольцо удовлетворяет условию максимальности для аннуляторов главных идеалов или если аннулятор аннулятора каждого идеала I кольца R совпадает с I, то R разлагается в дискретную прямую сумму простых колец с единицей. Среди идеалов произвольного ассоциативного кольца R, являющихся B-кольцами, существует в точности один максимальный идеал $\mathfrak{B}(R)$. Для всякого идеала I кольца R справедливо соотношение $\mathfrak{B}(I)=I\cap\mathfrak{B}(R)=I\mathfrak{B}(R)=\mathfrak{B}(R)\cdot I$. Разложение $R=\mathfrak{B}(R)+\mathfrak{B}^*(R)$, где $\mathfrak{B}^*(R)$ — аннулятор идеала $\mathfrak{B}(R)$, имеет место тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{B}(I)$ является главным для всякого главного идеала I кольца R.

Эти результаты используются для изучения строения ассоциативных колец. Устанавливается, что кольцо, удовлетворяющее условию минимальности для главных идеалов или условию максимальности для их аннуляторов, совпадает с суммой своих минимальных идеалов, обладающих единицей. Кроме того, в несколько измененной формулировке доказываются теоремы, рассматривавшиеся автором ранее (РЖМат, 1956, 257, 2021).

Примечание референта. На стр. 461 (5 строка снизу) вместо $(a)=\mathfrak{B}((a))+\mathfrak{B}((a))$ следует читать $(a)=\mathfrak{B}((a))+\mathfrak{B}^*((a))$. Л. А. Скорняков

6192. О вложении обобщенных регулярных колец в кольца с единицей. Колс (On the embedding of a generalized regular ring in a ring with identity. K o h l s C a r l W.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 165—168 (англ.)

Коммутативное кольцо A называется m-регулярным, где $m>0$, если для каждого элемента $a\in A$ существует такой элемент $x\in A$, что $a^{2m}x=a^m$, и π-регулярным, если для каждого элемента $a\in A$ существует такой элемент $x\in A$ и такое целое число $n>0$, зависящее от a, что $a^{2n}x=a^n$.

Если коммутативное кольцо S с единицей является кольцом операторов кольца A, то множество $(A;S)$ пар (a,s), $a\in A$, $s\in S$ является относительно операций $(a,s)+(b,t)=(a+b,\ s+t)$ и $(a,s)(b,t)=(ab+{+}_s\,sb+{+}_s\,ta,\ st)$ коммутативным кольцом с единицей $(0,1)$. Подмножество кольца (A,S), состоящее из пар вида $(a,0)$, $a\in A$, является идеалом, изоморфным кольцу A. Оказывается, что кольцо $(A;S)$ тогда и только тогда 1-регулярно, когда 1-регулярны кольца A и S. В частности, кольцо $(A;I_n)$, где n — характеристика кольца A_n, I_n — кольцо вычетов по модулю n, тогда и только тогда 1-регулярно, когда 1-регулярно кольцо A и $n\neq0$. Если кольцо A полупросто и m_1-регулярно, а кольцо S m_2-регулярно, то кольцо (A,S) m_1m_2-регулярно. Если кольцо $(A;S)$ m_3-регулярно, то кольца A и S m_3-регулярны (в частности, если кольцо $(A;I_n)$ m_3-регулярно, то $n\neq0$). Если кольцо A полупросто и π-регулярно, а кольцо S π-регулярно, то кольцо $(A;S)$ π-регулярно. Если кольцо (A,S) π-регулярно, то кольца A и S π-регулярны (в частности, если кольцо $(A;I_n)$ π-регулярно, то $n\neq0$). В. И. Шнейдмюллер

6193. О радикальных кольцах. Джонс, Лумер (Una nota acerca de anillos radicales. J o n e s A., L u m e r G.), Bol. Fac. ingr. y agrimensura Montevideo, 1956, **5**, № 13, I—IV (исп.); Publs Inst. mat. y estadist. Fac. ingr. y agrimens., 1956, **3**, № 1, 11—15 (исп.; рез. англ.)

Спектром элемента $a\in R$ относительно подкольца D центра произвольного кольца R называется множество $S_D(a)=S_D^+(a)\cup S_D^-(a)$, где $S_D^+(a)$ (соответственно $S_D^-(a)$) совокупность всех элементов $d\in D$, для которых правый (соответственно левый) идеал, порожденный элементом $d-a$, отличен от R). Оказывается, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами $S_D^+[P(a)]\supset P[S_D^+(a)]$.

Далее доказывается, что элемент a тогда и только тогда имеет квазиобратный, являющийся многочленом от a, когда существует такой многочлен $P(x)$, что $P(a)=0$ и $P(-1)=-1$. Отсюда выводится некоторое необходимое и достаточное условие радикальности всех подколец кольца R. Для алгебр показывается, что каждая подалгебра некоторой алгебры тогда и только тогда радикальна, когда все элементы алгебры нильпотентны. Доказывается также, что любая зам-

кнутая подалгебра радикальной банаховой алгебры радикальна. Резюме автора

6194. Алгебраическое расширение нормированных алгебр. Аренс, Гофман (Algebraic extension of normed algebras. Arens Richard, Hoffman Kenneth), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, 203—210 (англ.)

Пусть A — коммутативное нормированное кольцо (не обязательно полное) и $\alpha(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ — многочлен с коэффициентами из A, с обратимым старшим коэффициентом. Доказано, что кольцо A можно с сохранением нормы включить в нормированное кольцо B, в котором уравнение $\alpha(x) = 0$ имеет решение. Если кольцо A полно (или топологически полупросто, т. е. пересечение его замкнутых максимальных регулярных идеалов состоит только из нуля), то кольцо B можно также построить полным (соответственно полупростым).

Замеченная опечатка: стр. 207, строка 12 сверху: вместо $\lambda(x)$ следует читать $\gamma(x)$. М. А. Наймарк

6195. Теория компактных колец. II. Нумакура (Theory of compact rings. II. Numakura Katsumi), Math. J. Okayama Univ., 1956, 5, № 2, 103—113 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1957, 196. Пусть Q — компактное кольцо, каждый левый идеал которого является главным левым идеалом, и p — радикал Джекобсона. Доказано, что если фактор-кольцо Q/p просто, то кольцо Q изоморфно кольцу матриц либо над конечным вполне примарным кольцом S, либо над максимальным открытым компактным порядком некоторого вполне несвязного локально компактного кольца с делением, в зависимости от того, обращается ли в нуль какая-нибудь степень радикала p или нет. При этом, в случае, когда $p = 0$, кольцо S является конечным полем.

Кроме того, доказано, что любое компактное кольцо с единицей, в котором все замкнутые левые идеалы являются главными, разлагается в полную прямую сумму примарных колец одного из двух указанных выше видов. Компактное кольцо с единицей тогда и только тогда разлагается в полную прямую сумму компактных примарных колец, когда все любые произведения его открытых простых идеалов не зависят от порядка сомножителей. В. М. Глушков

6196. Линейные алгебры рода нуль. Паттерсон (Linear algebras of genus zero. Patterson E. M.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 3, 326—336 (англ.)

Пусть A — (не обязательно ассоциативная) алгебра ранга n над полем F, любая система образующих которой содержит не менее n элементов. Доказано, что если $n \geqslant 3$ или если $n = 2$ и $F \neq GF(2)$, то в алгебре A можно выбрать базис e_i с одной из следующих таблиц умножения: 1) $e_ie_j = 0$; 2) $e_ie_j = \lambda e_i + \mu e_j$, где $\lambda, \mu \in F$ и хотя бы один из элементов λ, μ отличен от нуля (алгебры этого типа тогда и только тогда изоморфны, когда отношение $\lambda : \mu$ для них одно и то же); 3) $e_ie_j = \delta^1_j e_i + \delta^2_i e_j$, где δ^i_j — символ Кронекера.

В случае $n = 2$ и $F = GF(2)$ существуют пять типов алгебр A, для каждого из которых также приведены таблицы умножения. А. И. Ширшов

6197. Линейные алгебры с единицей рода 1. Паттерсон (Linear algebras of genus one admitting a unit element. Patterson E. M.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 88—94 (англ.)

Доказано, что (не обязательно ассоциативная) алгебра A с единицей e над полем F ранга $n \geqslant 3$ тогда и только тогда обладает системой образующих, состоящей из $n - 1$ элементов, и не имеет систем образующих с меньшим числом элементов, когда на A существуют такие линейные функции φ, ψ и такая билинейная функция h, принимающие значения в поле F, что $xy = \varphi(y)x + \psi(x)y + h(x, y)e$, для любых элементов $x, y \in A$, отличных от элементов вида λe, $\lambda \in F$.

Если, кроме того, алгебра A ассоциативна, то в ней можно выбрать базис $e_1 = e_1, e_2, \ldots, e_n$ с одной из следующих таблиц умножения: 1) $e_ie_j = 0$; $i, j \neq 1$; 2) $e_ie_j = e_i$; $i, j \neq 1$.

В работе содержатся также некоторые предложения об алгебрах, минимальное число образующих которых совпадает с рангом, и о коммутативных алгебрах над полем комплексных чисел. А. И. Ширшов

6198. Двусторонние идеалы в алгебрах конечного ранга. Беренс (Zweiseitige Ideale in Algebren endlichen Ranges. Behrens Ernst-August), Math. Ann., 1956, 132, № 2, 95—105 (нем.)

Рассматривается алгебра A (вообще говоря, неассоциативная) конечного ранга над полем P, обладающая такой максимальной цепью идеалов $0 = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \ldots \subset I_s = A$, что $I_i = AE_i$, где E_i — идемпотент кольца $T(A)$, порожденного тождественным преобразованием алгебры A и всеми ее левыми и правыми умножениями. Этому требованию удовлетворяет, в частности, всякая максимальная цепь идеалов с факторами, не являющимися алгебрами с нулевым умножением. Доказано, что идемпотенты E_i можно выбрать таким образом, чтобы всякий идеал I представлялся как прямая сумма модулей вида $\mathfrak{M}_k = AM_k$, где $M_k = E_k - E_{k-1}$, $M_0 = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Указаны условия, при которых сумма этих модулей является идеалом алгебры A. Л. А. Скорняков

6199. Некоторые теоремы о вложении для колец. Ширшов А. И., Матем. сб. 1956, 40, № 1, 65—72

Пусть Σ — произвольное ассоциативное кольцо, $\mathfrak{A}_0$ — класс всех Σ-операторных колец, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ — подклассы класса $\mathfrak{A}$, соответственно состоящие из всех коммутативных, всех антикоммутативных, всех ассоциативных колец, и $\mathfrak{A}_4$ — класс всех Σ-операторных специальных J-колец. Доказано, что любое кольцо класса $\mathfrak{A}_i$, i=0, 1, 2, 3, 4, вложимо в кольцо того же класса, каждое счетное подмножество которого лежит в подкольце с k образующими, где $k = 1$, если $i = 0, 1$, и $k = 2$, если $i = 2, 3, 4$. Доказательство основывается на некоторой общей теореме о вложении колец. Для случая, когда Σ является полем, кроме того, доказано, что любая алгебра конечного ранга класса $\mathfrak{A}_3$ или $\mathfrak{A}_4$ вложима в алгебру конечного ранга того же класса с двумя образующими (в случае алгебр класса $\mathfrak{A}_4$ предполагается, что характеристика поля Σ отлична от двух). Из других результатов работы отметим следующий: J-кольцо специально, если специальны все его подкольца с конечным числом образующих. Л. А. Скорняков

6200. Конечные плоскости Фано. Глисон (Finite Fano planes. Gleason Andrew M.), Amer. J. Math., 1956, 78, № 4, 797—807 (англ.)

Доказывается дезарговость конечной плоскости, в которой проективно выполняется теорема 7_3. Л. А. Скорняков

6201. Об одном неархимедовском сложении и вопрос его применимости к физике. Штраусс (Über eine nicht-archimedische Addition und die Frage ihrer Verwendung in der Physik. Strauss Martin), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1955—56, 5, № 2, 93—97 (нем.; рез. франц., англ., русск.)

Сложение коллинеарных скоростей в специальной теории относительности задается формулой: $a \dotplus b = \frac{a + b}{1 + ab}$. Грамацкий (Gramatzki H. V., Astron. Nachr., 1928, 234, № 5594) предложил другой вариант сло-

жения: $a \dot{+} b = a + b - ab$. Автор доказывает, что в квадрате $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$ операции $+$ и $\dot{+}$ Эйнштейна и Грамацкого обладают одинаковыми алгебраическими свойствами, в то время как в квадрате $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $-1 \leqslant b \leqslant 1$ только сложение Эйнштейна удовлетворяет обычным аксиомам сложения упорядоченных величин. При этом в квадрате $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $-1 \leqslant b \leqslant 1$ нельзя определить операцию сложения так, чтобы она подчинялась обычным аксиомам, и в квадрате $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$ совпадала бы со сложением Грамацкого. С. Д. Берман

6202. **Прямые разложения дедекиндовых структур. Мочульский Е. Н.**, Матем. сб., 1955, 37, № 1, 89—102

Пусть S — дедекиндова структура с нулем 0 и единицей 1. Любое прямое разложение $1 = a_1 \dot{+} a_2$ определяет два отображения φ_1, φ_2 структуры S в себя: элемент $x \in S$ отображение φ_i переводит в его компоненту в слагаемом a_i. Композиции отображений φ_i (соответствующих, вообще говоря, различным разложениям единиц) называются эндоморфизмами структуры S. Говорят, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $a \in S$, если $a\eta = a$ и из $c \leqslant a$, $c\eta = 0$ следует, что $c = 0$. Пусть η — произвольный эндоморфизм и $1 = a_1 \dot{+} a_2$ — некоторое разложение единицы. Оказывается, что существует такой элемент $k(\eta) \leqslant a_1$, что 1) $k(\eta)\eta = 0$; 2) если $x \leqslant a_1$ и $x\eta = 0$, то $x \leqslant k(\eta)$; 3) $a_1/k(\eta) \cong a_1\eta/0$. Пусть φ_1, φ_2 — эндоморфизмы, соответствующие разложению $1 = a_1 \dot{+} a_2$, а θ_1, θ_2 — эндоморфизмы, соответствующие разложению $1 = b_1 \dot{+} b_2$. Пусть далее θ — один из эндоморфизмов $\varphi_1\theta_1\varphi_1$, $\varphi_1\theta_2\varphi_1$, $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$. Предполагая, что в структуре S определена сумма $r(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} k(\theta^i)$ говорят, что в структуре S выполнена гипотеза расщепления, если существует такой элемент $c \in S$, что 1) эндоморфизм $\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c; 2) если эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента c', то $c' \leqslant c$; 3) $a_1 = r(\eta) \dot{+} c$. Доказано, что в структуре S выполнена гипотеза расщепления, если существует такое i, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $a_1\eta^i$. Если для структуры S существует такое i, что $k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}) = \ldots = r(\eta)$, то в структуре S тогда и только тогда выполнена гипотеза расщепления, когда $a_1\eta^i = a_1\eta^{i+1} = \ldots$ Основной результат: Пусть в структуре S выполняется гипотеза расщепления и для любого элемента $x \leqslant r(\theta)$, где либо $\theta = \varphi_1\theta_1\varphi_1$, либо $\theta = \varphi_1\theta_2\varphi_1$, из равенств $0 = x \cdot k(\theta) = x\overline{k(\theta^2)} = \ldots$ следует, что $x = 0$. Тогда для любых двух конечных прямых разложений единицы $1 = a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m = b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n$, существуют такие прямые разложения

$$a_i = a_{i1} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$b_j = b_{j1} \dot{+} \ldots \dot{+} b_{jm} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

что для любого подмножества J множества натуральных чисел от 1 до n и любого числа k, удовлетворяющего неравенствам $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место равенство $1 = \sum_{i \neq k}^{\cdot} a_i \dot{+} \sum_{j \in J}^{\cdot} a_{kj} \dot{+} \sum_{j \in J}^{\cdot} b_{kj}$. Эта теорема обобщает на случай дедекиндовых структур результаты референта (Матем. сб., 1951, 28, № 2, 481—502) и Хостинского (Hostinsky L. A., Amer. J. Math., 1951, 73, № 4, 741—755):

Если для эндоморфизма $\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ структуры S существует такое натуральное число i, что η индуцирует автоморфизм элемента $a_1\eta^i$, то любые две конечные прямые разложения структуры S обладают прямо подобными продолжениями. Следствием этой теоремы является, например, структурная теорема Ремака—Шмидта. А. Х. Лившиц

6203. **Арифметика структуры подалгебр общей алгебры. Престон** (The arithmetic of a lattice of sub-algebras of a general algebra. Preston G. B.), J. London Math. Soc., 1954, 29, Part 1, № 113, 1—15 (англ.)

Попытка построения для общих алгебр (в смысле Биркгофа) теории, аналогичной мультипликативной теории идеалов колец. $(i, j, \ldots, k)$-идеалом алгебры A относительно n-арной операции f_n, где $1 \leqslant i, j, \ldots, k \leqslant n$, называется такая подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры A, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ из $a_i, a_j, \ldots, a_k \in \mathfrak{A}$ следует, что $f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathfrak{A}$. r-Идеалом алгебры A относительно операции f_n называется такая подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры A, что $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathfrak{A}$ всякий раз, когда произвольные r элементов из последовательности $a_1, \ldots, a_n$ лежат в $\mathfrak{A}$. Оказывается, что множество всех $(i, j, \ldots, k)$-идеалов так же как и множество всех r-идеалов относительно данной операции f_n являются полными структурами. Введены и некоторые другие типы идеалов, составляющих дистрибутивные структуры или даже булевы алгебры.

Далее, весьма естественным путем определяются простые и примарные идеалы, элементно коммутативные операции, ассоциативные операции, операции дистрибутивные над данным множеством операций, коммутирующие операции, элементы единичные, относительно данной операции, самокоммутативные операции и т. п. Определяется также понятие радикала множества $\mathfrak{A}$ относительно операции f_n. Алгебра A, в которой существует самокоммутативная операция f_n, дистрибутивная над всеми остальными операциями алгебры A, называется кольце-алгеброй (относительно операции f_n), если для каждого i она содержит i-единицы относительно операции f_n. Алгебра A, в которой существует элементно коммутативная, ассоциативная операция f_n, дистрибутивная над всеми остальными операциями, называется α-алгеброй. Оказывается, что в α-алгебре, а также в кольце-алгебре A, радикал $R_{\mathfrak{A}}$ любого идеала $\mathfrak{A}$ является пересечением всех минимальных простых идеалов, содержащих $\mathfrak{A}$.

Для α-алгебр и кольце-алгебр доказан ряд предложений о примарных идеалах и об инвариантности числа факторов при представлении идеалов в виде пересечения примарных идеалов. В заключение рассмотрены приложения полученных результатов к полугруппам и кольцам. Ю. И. Соркин

6204. **Представление идеалов в абстрактных алгебрах. Престон** (Factorization of ideals in general algebras. Preston G. B.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 363—368 (англ.)

Используя основные понятия и методы своей предыдущей работы (реф. 6203), автор обобщает полученные там результаты. Под идеалами абстрактной алгебры $[A, \Omega]$ подразумеваются 1-идеалы относительно фиксированной операции $f_n \in \Omega$. Операция $f_n(a_1, \ldots, a_n)$ индекса n индуцирует ряд операций индекса $r \leqslant n$, которые получаются, если условиться среди n элементов $a_1, \ldots, a_n$ различными брать самое большее r элементов; все индуцированные операции индекса r обозначаются через $f_n^r(s_1, \ldots, s_r)$. Множество $\mathfrak{a}$ называется простым $_r$ (относительно f_n), если из $f_n^r(s_1, \ldots, s_r) \in \mathfrak{a}$, для любого $f_n^r(s_1, \ldots, s_r)$, следует, что по крайней мере один из элементов $s_1, \ldots, s_r$ принадлежит $\mathfrak{a}$. Простое $_r$ множество является одновременно простым $_s$ множеством для любого $s \leqslant r$. Вводятся функции $\Phi^r (\equiv \Phi^r[f_n])$ ранга 0 и более высоких рангов, определяемые по

индукции следующим образом: $\Phi^r = f_n^r(\Phi_1^r, \Phi_2^r, \ldots, \Phi_r^r)$, где $\Phi_1^r, \Phi_2^r, \ldots, \Phi_r^r$ — r функций, имеющих меньшие ранги. Радикалом $_r$ (относительно f_n) множества $\mathfrak{a}$ называется множество $R_{\mathfrak{a}}r$ таких элементов $s \in A$, что $\Phi^r(s) \in \mathfrak{a}$ для некоторой функции $\Phi^r\,]f_n]$. Поскольку функция Φ^r является частным случаем функций вида Φ^t, для всех $t \geqslant r$, то $\mathfrak{a} \subseteq R_{\mathfrak{a}}1 \subseteq R_{\mathfrak{a}}2 \subseteq \ldots \subseteq R_{\mathfrak{a}}n = R_{\mathfrak{a}}$. Если некоторое простое $_t$ множество содержит множество $\mathfrak{a}$, то оно содержит и радикалы $R_{\mathfrak{a}}r$ для всех $r \leqslant t$. В кольце-алгебре и в α-алгебре (определение см. реф. 6203) радикал $_r$ $R_{\mathfrak{a}}r$ идеала $\mathfrak{a}$ является идеалом, совпадающим с пересечением всех минимальных простых $_r$ идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$.

Множество $\mathfrak{q}$ называется примарным $_r$ (относительно f_n), если из $f_n^r(s_1, \ldots, s_r) \in \mathfrak{q}$, для любого $f_n^r(s_1, \ldots, s_r)$, следует либо $s_i \in \mathfrak{q}$ для некоторого i, либо $s_j \in R_{\mathfrak{q}}r$ для всех j. Если $r > 1$, то элемент $b \in A$ называется связанным $_r$ (относительно f_n) с множеством $\mathfrak{a}$ ($\neq A$), если существуют такие элементы $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}$ (в статье пропущено условие, что элементы $b_1, \ldots, b_{r-1} \notin \mathfrak{a}$. *Ред.*), что для некоторой функции $\Phi^r\,[f_n]$

$$f_n^r\{b_1, b_2, \ldots, \Phi^2(b), \ldots, b_{r-1}\} \in \mathfrak{a}$$

для некоторой операции $f_n^r(s_1, \ldots, s_r)$. Каждый элемент алгебры A связан $_r$ с A. Элемент b называется связанным $_1$ с множеством $\mathfrak{a}$, если для некоторой функции Φ^1, ранг которой $\geqslant 1$, $\Phi^1(b) \in \mathfrak{a}$. Множество $\mathfrak{q}$ примарно $_r$ тогда и только тогда, когда все элементы, связанные $_r$ с $\mathfrak{q}$, содержатся в $R_{\mathfrak{q}}r$. В кольце-алгебре и в α-алгебре идеал $\mathfrak{q}$ примарен $_r$ тогда и только тогда, когда множество всех связанных $_r$ с $\mathfrak{q}$ элементов является единственным минимальным простым $_r$ идеалом $\mathfrak{p}$, содержащим $\mathfrak{q}$; $\mathfrak{p}$ называется простым $_r$ идеалом, принадлежащим примарному $_r$ идеалу $\mathfrak{q}$.

Каждый идеал примарен $_1$, так что для $r = 1$ теорема о представлении идеала в пересечении примарных $_r$ идеалов имеет место всегда. Далее автор ограничивается рассмотрением кольце-алгебр и α-алгебр и получает ряд результатов о представлении идеалов в виде пересечения примарных $_r$ идеалов, аналогичных тем, которые им получены в упомянутой выше работе. В частности, справедлива следующая теорема: Пусть в кольце-алгебре или α-алгебре (определенных относительно f_n) дано приведенное представление

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k$$

идеала $\mathfrak{a}$ в виде пересечения примарных $_r$ идеалов, и пусть $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ — простые $_r$ идеалы, принадлежащие $\mathfrak{a}$ (т. е. $\mathfrak{p}_i$ принадлежит $\mathfrak{q}_i$). Тогда, если $r \leqslant 2$, то: 1) все приведенные представления идеала $\mathfrak{a}$ имеют одно и то же число компонент; 2) множество простых $_r$ идеалов, принадлежащих $\mathfrak{a}$, одно и то же для всех приведенных представлений идеала $\mathfrak{a}$.

В заключение отмечается, что в кольце-алгебре $[A, f_n]$, удовлетворяющей условию обрыва возрастающих цепочек идеалов и содержащей элемент e, являющийся одновременно единицей и $(n-1)$-единицей, каждый неприводимый идеал примарен $_r$ для $r = 1, 2, \ldots, n$. Доказательства многих утверждений либо совсем не приводятся, либо приводятся очень сжато, поскольку, как отмечает автор, они аналогичны доказательствам соответствующих утверждений, приведенным в указанной выше работе автора.

Е. Г. Шульгейфер

6205. Бинарные операции. Шкала операций. Андреоли (Operazioni binarie. Scale di operazioni. Andreoli Giulio.), Ricerca, 1954, Napoli 5, № 3, 3—11 (итал.)

Статья начинается с некоторых замечаний (частично ошибочных) о бинарных операциях, определенных на произвольном множестве E, основываясь на которые, автор приходит к случаю, когда E является областью комплексных чисел, а операция определяется формулой $a(+)x = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(x))$, где φ — данная функция. Эта операция называется сложением, преобразованным с помощью функции φ. Система операций (коммутативных и ассоциативных), получающихся таким образом с помощью всевозможных итераций (как в положительном, так и в отрицательном направлениях) функции φ, называется шкалой операций. Если $\varphi = \ln$, $\varphi^{-1} = \exp$, то каждая из операций шкалы дистрибутивна относительно предыдущей. Эта ситуация обобщается на случай, когда E является множеством бесконечных последовательностей комплексных чисел, а операция определяется как результат применения к соответствующим элементам двух последовательностей одной из операций указанной выше логарифмической шкалы. Строятся такие шкалы этих операций, что в каждой шкале любая операция дистрибутивна относительно предыдущей. При этом возможны и конечные шкалы. В заключение кратко намечены возможности дальнейших обобщений.

I. M. H. Etherington

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 6.

6206. Группы автоморфизмов дифференциальных полей и групповые многообразия. Мацумура (Automorphism-groups of differential fields and group-varieties. Matsumura Hideyuki), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 3, 283—292 (англ.)

Пусть F — дифференциальное поле нулевой характеристики с полем констант C, G/F — его строго нормальное расширение в смысле Колчина, C^* — поле констант универсального (дифференциального) расширения G^* поля F. Тогда компонента единицы G_0 группы G^* строгих изоморфизмов поля G над F точно представима (абстрактным) групповым многообразием в смысле А. Вейля (Weil A., Variétés abéliennes et courbes algébriques, Paris, 1948), причем C является полем определения этого многообразия, а C^* — его универсальной областью. В этом представлении неприводимые множества в G_0^* соответствуют подмногообразиям в V, а все автоморфизмы из G_0^* представляются в подгруппе $V(C)$, состоящей из всех C-рациональных точек многообразия V.

В. М. Глушков

6207. О теории Галуа дифференциальных полей. Колчин (On the Galois theory of differential fields. Kolchin E. R.), Amer. J. Math., 1955, 77, № 4, 868—894 (англ.)

Пусть F — дифференциальное поле с m дифференциальными операторами, поле констант C которого алгебраически замкнуто, и F^* — расширение поля F, с алгебраически замкнутым полем констант C^* бесконечной степени трансцендентности над C («универсальное» расширение).

Доказано, что для любого строго нормального расширения $G \subset F^*$ поля F группа $\mathfrak{G}$ всех автоморфизмов поля $G < C^* >$ над полем $F < C^* >$ (группа Галуа поля G над полем F) изоморфна некоторому абстрактному групповому многообразию V (вообще говоря, приводимому) над полем C (и с полем G^* в качестве универсальной области), причем существует такой изоморфизм $f: \mathfrak{G} \to V$, что 1) для любого элемента $\sigma \in \mathfrak{G}$ поле констант дифференциального поля G

совпадает с полем $C(f(\sigma))$; 2) точка $f(\sigma') \in V$ тогда и только когда является специализацией точки $f(\sigma) \in V$, когда для любого $x \in G$ элемент $\sigma' x$ является специализацией элемента σx. Это утверждение обобщает один результат Мацумура (реф. 6206). Обратное утверждение доказано только для неприводимых групповых многообразий.

Далее на основе изучения некоторых групп когомологий доказывается, что расширение G тогда и только тогда является расширением Пикара-Вессио в смысле автора (Kolchin E., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 586—603), когда его группа Галуа изоморфна (в указанном выше смысле) некоторой алгебраической матричной группе. В. М. Глушков

6208. **Об идеалах в кольцах мультидифференциальных многочленов. Левин** (On ideals in multidifferential polynomial rings. Levin Frank), Math. Ann., 1956, 132, № 4, 289—309 (англ.)

Рассматривается поле F (характеристики нуль) с n дифференцированиями $D_1, D_2, \ldots, D_n$, коммутирующими между собой. Результат применения к элементу $a \in F$ дифференцирования D_i обозначается через $(a) D_i$. Коммутативная полугруппа, порожденная дифференцированиями D_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), называется мультидифференцированием $\mathfrak{D}$ в поле F размерности n. Рассматриваются многочлены от неизвестных $Y_1, \ldots, Y_n$ (с коэффициентами из поля F записываемыми справа) вида $A = \sum_\tau Y^\tau a_\tau$, где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — набор неотрицательных целых чисел; $Y^\tau = \prod_i Y_i^{\tau_i}$. Их сложение определяется обычным образом, а умножение — с помощью ассоциативного и дистрибутивного законов и следующего правила умножения слева на элементы $a \in F$: $a \cdot Y_i = Y_i a + (a) D_i$. Эти многочлены (они называются мультидифференциальными) можно рассматривать как операторы на F (считается, что Y_i действует как D_i). Совокупность мультидифференциальных многочленов образует кольцо $\Omega(F, \mathfrak{D})$ (РЖМат, 1956, 4384). Строится теория идеалов этого кольца. Случай одного переменного рассматривался Оре (Ore O., J. reine und angew. Math., 1932, 167, 221, 233).

Показывается, что для того чтобы кольцо $\Omega(F, \mathfrak{D})$ было простым, необходимо и достаточно (условие регулярности), чтобы операторы D_i были линейно независимы, т. е. чтобы равенство $\sum_i c_i (a) D_i = 0$ имело место для всех a лишь тогда, когда $c_i = 0$ для всех i.

В кольце $\Omega(F, \mathfrak{D})$ имеется антиавтоморфизм, относящий каждому $A = \sum_\tau Y^\tau a_\tau$ многочлен $A^* = \sum_\tau (-1)^{|\tau|} a_\tau Y^\tau$, где $|\tau| = \sum_i \tau_i$. Тем самым между правыми и левыми идеалами устанавливается взаимно однозначное соответствие. Рассматривается некоторый процесс построения базисов идеалов. Доказывается, что элемент $a \neq 0$ поля F тогда и только тогда является нулем многочлена A, когда многочлен A принадлежит идеалу (максимальному), порожденному многочленами $Y_i - a^{-1}(a) D_i$. Идеал $\sum$ называется ограниченно подобным идеалу $\sum'$, если существует такой многочлен $C \in \Omega(F, \mathfrak{D})$, что $\langle C \rangle \cup \sum' = \langle 1 \rangle$ и $C \sum = \langle C \rangle \cap \sum'$ (где $\langle C \rangle$ — главный идеал, порожденный многочленом C). Доказывается, что если некоторый идеал двумя различными способами представлен в виде пересечения конечного числа максимальных идеалов, то каждый идеал первого представления подобен, по крайней мере, одному идеалу второго.

И. З. Розенкноп

6209 К. **Современная арифметика и алгебра. Т. 2. Кольца и поля, алгебраическое исчисление, идеалы и делимость. Шатле** (Arithmétique et algèbre modernes. T. 2. Anneaux et corps, calcul algébrique, idéaux et divisibilité. Chatelet Albert, Paris, Presses univ. France, 1956, viii, p. 277—728, ill., 1800 fr.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 4, 77 (франц.)

См. также: 6116, 6124, 6128, 6210, 6217, 6343, 6409, 6592, 6600—6602, 6604, 6607, 6611, 6613 К, 6628, 6654, 6657, 6659, 6662, 6663, 6710, 6731, 6759.

ТОПОЛОГИЯ

6210. **Число линейных, направленных, корневых и связных графов. Харари** (The number of linear, directed, rooted, and connected graphs. Harary Frank), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, 445—463 (англ.)

Приводятся подсчеты числа графов того или иного вида. Основным инструментом является следующая теорема, которую автор называет теоремой Полиа. Предположим, что каждой «фигуре» (термин «фигура» не определяется) поставлено в соответствие некоторое неотрицательное целое число, называемое «содержанием» этой фигуры, и φ_k — число различных фигур содержания k. Конфигурацией длины s называется любая последовательность, содержащая s фигур. Две конфигурации называются G-эквивалентными, где G — некоторая группа подстановок степени s, если некоторой подстановкой из G одна конфигурация переводится в другую. Через F_k обозначается число G-неэквивалентных между собой конфигураций (длины s) содержания k. Тогда производящие ряды $\varphi(x) = \sum_0^\infty \varphi_k x^k$, $F(x) = \sum_0^\infty F_k x^k$ связаны соотношением (теорема Полиа):

$$F(x) = \frac{1}{h} \sum h_{j_1, j_2, \ldots, j_s} [\varphi(x)]^{j_1} [\varphi(x^2)]^{j_2} \ldots [\varphi(x^s)]^{j_s}.$$

Здесь h — порядок группы G, а $h_{j_1, j_2 \ldots j_s}$ — так называемый циклический индекс группы G, т. е. число элементов группы G, имеющих (как подстановка) j_k циклов длины k, $k = 1, 2, \ldots, s$ (очевидно, что числа $j_1, j_2, \ldots, j_s$ должны при этом удовлетворять соотношению $1j_1 + 2j_2 + \ldots + sj_s = s$); суммирование ведется по всем допустимым последовательностям $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$. Для подсчета числа графов, имеющих p вершин, «фигурами» объявляются неупорядоченные пары точек, причем пара точек, соединенная отрезком (ребром), считается фигурой содержания 1, а пара несоединенных точек — фигурой содержания 0. Таким образом, $\varphi(x) = 1 + x$. Любой граф (без петель) с p вершинами рассматривается в силу этого соглашения как конфигурация длины $p(p-1)/2$, причем содержание этой конфигурации равно числу ребер графа. Полная группа S_p подстановок степени p, рассматриваемая как действующая на парах точек, принимается за группу G. Таким образом, G есть некоторая группа подстановок степени $p(p-1)/2$, изоморфная группе S_p. Число F_k, обозначаемое в этом случае через g_{pk}, равно, очевидно, числу неизоморфных графов с p вершинами и k ребрами: $F(x) = \sum g_{pk} x^k$ (суммирование от 0 до $p(p-1)/2$). Для вычисления многочлена $F(x)$ (а значит, и чисел g_{pk}) по теореме Полиа остается, таким образом, найти

циклические индексы группы G. Вычисление циклических индексов группы S_p представляет собой элементарную комбинаторную задачу. С помощью же этих индексов могут быть вычислены и индексы группы G. Автор проводит эти вычисления в явном виде, получая таким образом явное выражение производящего многочлена $F(x)$ для рассматриваемого случая (окончательный результат мы не приводим, ввиду его сложности). Выписаны многочлены $F(x)$ для $p=1, 2, \ldots, 7$. Эти результаты о числе графов были также получены Ридделем и Уленбеком (РЖФиз, 1955, 11288).

Рассматривая в качестве «фигур» упорядоченные пары точек, автор получает в качестве конфигураций «диграфы» (т. е. графы, на каждом ребре которых отмечены стрелками одно или два направления). Дается общая формула производящего многочлена для этого случая; выписаны производящие многочлены для p=1, 2, . . ., 5.

Далее аналогичным образом рассматриваются корневые и многокорневые графы, а также графы, в которых между любыми двумя вершинами допускаются несколько (неразличных или же «разноцветных») ребер. В заключение, с помощью комбинаторных соотношений Ридделя и полученных в статье результатов подсчитывается число связных графов (того или иного вида).

Указаны некоторые проблемы. В замечании, добавленном при правке корректуры, автор указывает, что некоторые результаты этой статьи появились также в заметке Слепяна (РЖМат, 1953, 1113).

В. Г. Болтянский

6211. Об универсальных пространствах. Мрувка (On universal spaces. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, 4, № 8, 479—481 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 8, 467—469

Пусть X — топологическое пространство и T — множество мощности $\mathfrak{m}$. Тогда $X^{\mathfrak{m}}$ означает прямое произведение $P_{\tau\in T} X_\tau$ (где $X_\tau = X$) с обычной тихоновской топологией.

Автор дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы пространство Y было топологически вложимо в произведение некоторого числа экземпляров пространства X. Из этого результата вытекают известные теоремы вложения Тихонова и Александрова. Кроме того, доказана следующая теорема.

Не существует такого T_1-пространства X, что каждое T_1-пространство может быть вложено в $X^{\mathfrak{m}}$. Каждое T_1-пространство может быть вложено в $L_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}$ (при некотором $\mathfrak{m}$), где $L_{\mathfrak{m}}$ есть T_1-пространство мощности $\mathfrak{m}$, в котором замкнуты только конечные множества и все пространство.

J. W. Jaworowski

6212. О квазикомпактных пространствах. Мрувка (On quasicompact spaces. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, 4, № 8, 483—484 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 8, 471—472

Вполне регулярное пространство X называется: а) квазикомпактным, если каждая действительная непрерывная функция, определенная на X, ограничена; б) счетно абсолютно замкнутым, если выполнено следующее условие: если $X \cup \{a\}$ — вполне регулярное пространство, получаемое из X присоединением одной точки a, и если в точке a выполняется первая аксиома счетности, то точка a изолирована.

Показано, что для вполне регулярных пространств понятия счетной абсолютной замкнутости и квазикомпактности совпадают. Для нормальных пространств счетная абсолютная замкнутость эквивалентна компактности.

J. W. Jawarowski

6213. Добавление к нашей работе «О расширениях топологических пространств». Нёбелинг, Бауэр (Ergänzung zu unserer Arbeit «Uber die Erweiterungen topologischer Räume». Nöbeling Georg, Bauer Heinz), Math. Ann., 1957, 132, № 5, 451 (нем.)

См. РЖМат, 1957, 239. Указывается, что в определении F-алгебры пропущено следующее свойство: для каждого элемента x алгебры $\mathfrak{A}$ элемент x^2+e должен иметь обратный элемент.

Ю. М. Смирнов

6214. Заметка о полуравномерных пространствах. Кришнан (A note on semi uniform spaces. Krishnan V. S.), J. Madras Univ. Sect. B., 1955, 25, 123—124 (англ.)

Автор рассматривает окрестностные пространства и обобщенные равномерные пространства (более общие, чем топологические и равномерные пространства) и показывает, что три условия, наложенные на них, эквивалентны.

E. Michael

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 66.

6215. О понятии полноты в пространствах близости. Мрувка (On the notion of completeness in proximity spaces. Mrówka S.), Bull Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, 4, № 8, 477—478 (англ.); Бюлл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 8, 465—466

Пусть X — пространство близости. Тогда в X существует такое семейство псевдометрик $\{\rho_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, что множества A, $B \subset X$ тогда и только тогда близки, когда $\rho_\xi(A, B) = 0$ для всех $\xi \in \Xi$. Автор вводит понятие полноты пространства близости с помощью семейства псевдометрик.

Естественным образом можно ввести семейство псевдометрик в следующих пространствах: 1) в прямом произведении $P_\tau X^\tau$ пространств близости X^τ, $\tau \in T$; 2) в пространстве X^T всех ограниченных функций, определенных на множестве T со значениями в X; 3) в пространстве 2^X всех замкнутых и ограниченных подмножеств пространства X.

Прямое произведение $P_\tau X^\tau$ полных пространств X^τ полно; это следует из обобщенной теоремы Тихонова.

Если X полно, то пространство X^T полно. Если T — топологическое пространство, то множество всех непрерывных функций замкнуто в пространстве X^T и потому является полным пространством. Вопрос о том, следует ли из полноты пространства X полнота пространства 2^X, остается открытым. Доказательства не приводятся.

J. W. Jaworowski

6216. О полноте равномерных пространств. Накано (On completeness of uniform spaces. Nakano Hidegorô), Proc. Japan Acad., 1953, 29, 490—494 (англ.)

Автор доказывает несколько критериев, для того чтобы равномерное пространство E было полным, в случае, когда его равномерная структура определена как наименее тонкая среди структур, в которых отображения E в полные равномерные пространства S_λ равномерно непрерывны, или как наименее тонкая структура, в которой равномерно равностепенно непрерывны семейства отображений E в S_λ. Выводятся аналогичные критерии для некоторых топологий в пространстве линейных отображений векторного пространства в векторное топологическое пространство.

J. Dieudonné

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 59.

6217. О слабо дополнительных структурах. Сас (On weakly complemented lattices. Szász G.), Acta scient. math., 1955, 16, № 1—2, 122—126 (англ.)

В работе референта (РЖМат, 1953, 1112) было введено понятие слабо дополнительной структуры. В реферируемой работе дается новая более простая характеристика этих структур и изучается их связь с другими важными классами структур.

Пусть L обозначает структуру с наименьшим элементом 0. Полудополнением элемента x из L называется элемент y из L такой, что $x \wedge y = 0$. Структура L называется полудополнительной, если всякий ее элемент, отличный от (возможно существующего) наибольшего элемента, имеет отличное от нуля полудополнение.

Доказано, что слабо дополнительные структуры могут быть охарактеризованы как такие структуры, для любой пары u, v элементов которых такой, что $u < v$, существует полудополнение элемента u, не являющееся полудополнением элемента v.

Доказано, далее, что всякая слабодополнительная структура полудополнительна, что всякая относительно дополнительная структура с нулевым элементом и, следовательно, всякая дополнительная модулярная структура — слабо дополнительны, причем условие модулярности не может быть заменено на полумодулярность.

Примечание референта. Полученная автором характеристика слабо дополнительных структур была приведена референтом в докторской диссертации (РЖМат, 1953, 1132 Д), но не была опубликована.

Г. Я. Арешкин

6218. О некоторых булевых алгебрах. Сикорский, Трачик (On some Boolean algebras. Sikorski R., Traczyk T.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 8, 489—492 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 8, 477—480

Для произвольного пространства X через $S(X)$ обозначается σ-поле всех подмножеств пространства X. Если Y — топологическое пространство, то через $B(Y)$ и $A(Y)$ обозначаются соответственно σ-поле всех борелевских подмножеств пространства Y и наименьшее σ-поле, состоящее из всех множеств, которые одновременно открыты и замкнуты в Y.

Если дано произвольное кардинальное число $\mathfrak{m}$, то через $C_{\mathfrak{m}}$ мы будем обозначать обобщенный канторов дисконтинуум, т. е. прямое произведение $\mathfrak{m}$ экземпляров хаусдорфова двухточечного пространства. Бикомпактное и вполне несвязное топологическое пространство Y называется абсолютным B-ретрактом, если Y есть ретракт каждого бикомпактного и вполне несвязного пространства $Y_0 \supset Y$.

Авторы доказывают, что для каждой σ-полной булевой алгебры A следующие четыре условия эквивалентны: 1) A изоморфна булевой алгебре $S(X)/I$, где I — некоторый σ-идеал подмножеств пространства X; 2) для любого абсолютного B-ретракта Y каждый гомоморфизм $h : A(Y) \to A$ может быть распространен в σ-гомоморфизм $S(Y) \to A$; 3) для любого кардинального числа $\mathfrak{m}$ каждый σ-гомоморфизм $h : A(C_{\mathfrak{m}}) \to A$ может быть распространен в σ-гомоморфизм $S(C_{\mathfrak{m}}) \to A$; 4) существует такое кардинальное число $\mathfrak{m} \geqslant \overline{\overline{A}}$, что каждый σ-гомоморфизм $h : A(C_{\mathfrak{m}}) \to A$ может быть распространен в σ-гомоморфизм $S(C_{\mathfrak{m}}) \to A$.

Авторы доказывают также, что из условия 1) вытекает следующее условие: 5) для любого полного сепарабельного метрического пространства Y каждый σ-гомоморфизм $h : B(Y) \to A$ может быть распространен в σ-гомоморфизм $S(Y) \to A$.

Авторы показывают, что свойство 5) не является характеристическим для того, чтобы σ-полная булева алгебра A была изоморфна алгебре вида $S(X)/I$.

H. Rasiowa

6219. О замкнутых отображениях и размерности. Морита (On closed mappings and dimension. Morita Kiiti), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 3, 161—165 (англ.)

Обобщаются теоремы Гуревича о повышении и понижении размерности при замкнутых (непрерывных) отображениях:

1. Если при замкнутом непрерывном отображении нормального пространства X на нормальное пространство Y полный прообраз каждой точки состоит не более чем из $k+1$ точки, то

$$\dim Y \leqslant \operatorname{Ind} X + k.$$

2. Если при замкнутом непрерывном отображении нормального пространства X на паракомпактное T_1-пространство Y для каждой точки $y \in Y$ справедливо неравенство $\dim f^{-1}(y) \leqslant k$, то

$$\dim X \leqslant \operatorname{Ind} Y + k.$$

Здесь dim — размерность, определенная с помощью покрытий, а Ind — большая индуктивная размерность. В случаях $\dim X \leqslant 1$ (в теореме 1) и $\dim f^{-1}(y) \leqslant 0$ (в теореме 2) в соответствующих неравенствах можно заменить размерность Ind на dim.

Ю. М. Смирнов

6220. Свойства отделимости и n-неразложимые континуумы. Берджесс (Separation properties and n-indecomposable continua. Burgess C. E.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 4, 595—599 (англ.)

Континуум M называется n-неразложимым, если n есть наибольшее из таких целых чисел m, что M является объединением m континуумов, ни один из которых не является подмножеством суммы остальных. Каждый неразложимый континуум является 1-неразложимым.

Говорят, что подмножество H континуума M разрезает M между подмножествами K и L континуума M, если K и L лежат в $M \setminus H$ и H пересекает каждый подконтинуум континуума M, пересекающий оба множества K и L. Подмножество H континуума M разрезает M, если H разрезает M между некоторыми двумя точками. Подмножество H континуума M разделяет M, если $M \setminus H$ несвязно. Континуум M разделен (разрезан) парой континуумов H и K, если $H \cup K$ разделяет (разрезает) M.

Из доказанных в работе теорем отметим следующие:

Теорема 1. Если для некоторого положительного n континуум M является n-неразложимым, то всякий собственный подконтинуум континуума M разрезает M.

Теорема 2. Если M — такой плоский континуум, что никакая пара подконтинуумов континуума M не разделяет M и никакой подконтинуум континуума M не разрезает M между двумя открытыми (относительно M) подмножествами континуума M, то существует такое положительное число n, меньшее пяти, что континуум M является n-неразложимым.

Теорема 6. Если M — континуум, неприводимый относительно некоторых n точек, и никакое множество, являющееся объединением m континуумов, не разделяет M, то существует такое целое положительное число k, меньшее $m+n$, что континуум M является k-неразложимым.

Континуум M называется мультикогерентным, если его нельзя представить в виде суммы двух собственных подконтинуумов H и K, пересечение которых является континуумом.

Следствие. Если мультикогерентный континуум M неприводим относительно некоторых n точек, то существует такое целое положительное число k, меньшее $n+1$, что континуум M является k-неразложимым.

А. С. Пархоменко

6221. k-кратно неприводимое разложение пространства относительно отображения. Каснриэл (k-fold irreducible decomposition of a space relative to a mapping. Kasriel Robert H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 440—446 (англ.)

Разложение $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ компакта A на непустые замкнутые подмножества автор называет k-кратно неприводимым относительно непрерывного отображения $f: A \to B$, если для $i = 1, \ldots, k$ множество A_i^0 внутренних точек множества A_i плотно в A_i, $A_i^0 \cap A_j^0 = 0$ при $i \neq j$, $f(A_i) = B$ и отображение $f: A_i \to B$ неприводимо.

Изучается связь между тремя свойствами отображения $f: A \to B$: 1) существует k-кратно неприводимое разложение компакта A относительно отображения f, 2) отображение f является k-кратно неприводимым (Whyburn, Amer. J. Math., 1952, 74, 910—912), и 3) множество точек кратности k при отображении f плотно в A. Показано, что из 1) всегда следуют 3), а если f квазиоткрыто (и, в частности, открыто), то 1) и 3) эквивалентны. Это же выполняется и для квазимонотонных отображений, если A — локально связный континуум. Для отображений, у которых кратность каждой точки $\geqslant k$, при указанных условиях эквивалентны все три свойства 1), 2) и 3). Рассмотрены также некоторые приложения к отображениям граничных кривых и двумерных многообразий. И. А. Вайнштейн

6222. Теоремы о непрерывных отображениях. Бурже (Some mapping theorems. Bourgin D. G.), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1—2, 177—189 (англ.)

Доказывается несколько предложений, относящихся к обобщениям известных теорем Борсука и Какутани о непрерывных отображениях сфер.

Флойд доказал (РЖМат, 1957, 256) следующую теорему: Какова бы ни была непрерывная действительная функция f и каков бы ни был треугольник Δ_0 на сфере S^2, существует конгруэнтный с Δ_0 треугольник Δ, в вершинах которого значения функции f равны. Теорема 1 реферируемой статьи следующим образом обобщает теорему Флойда: Пусть M — компактное множество евклидова пространства E^3, отделяющее начало координат O от бесконечности. Тогда для любых трех лучей L_1, L_2, L_3 с началом в точке O существует вращение r пространства E^3 такое, что каждое из множеств $r(L_1 \cup L_2) \cap M$ и $r(L_1 \cup L_3) \cap M$ содержит по две точки, равноотстоящих от O.

Результат Флойда получается из теоремы I, если в качестве M взять компактное множество, пересекающееся с каждым лучом, выходящим из O, в точности в одной точке.

Теорема II обобщает теорему Яворовского (РЖМат, 1957, 257) о существовании неподвижных точек инволюционных отображений ациклических компактов на случай периодических отображений порядка $N > 2$. Теорема III относится к периодическим отображениям трехмерного проективного пространства.

И. И. Гордон

6223. Недуализируемость групп Бетти, основанных на конечных покрытиях. Александров П. С., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 1, 5—6

Определяются два множества: A — полусегмент и A' — замкнутый круг, из границы которого удалена одна точка. Тогда дополнительные множества $B = S^2 \setminus A$ и $B' = S^2 \setminus A'$ гомеоморфны: каждое из них гомеоморфно открытому кругу с одной присоединенной граничной точкой. Строится существенное в смысле равномерных гомотопий отображение множества A' на двумерную сферу S^2. Из существования этого отображения следует, что группа $\Delta^2 A'$, основанная на конечных покрытиях, отлична от нуля. Так как $\Delta^2 A = 0$, то, следовательно, группы такого типа не могут быть выражены через топологические свойства дополнительных множеств. (Как известно, группы Бетти, основанные на бесконечных покрытиях, являются инвариантами дополнительных множеств.)

При определении множества A' допущена неточность. К. А. Ситников

6224. Исправление заметки «Недуализируемость групп Бетти, основанных на конечных покрытиях». Александров П. С., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 3, 357

Исправляется ошибка при определении множества A′ (реф. 6223) в заметке автора. К. А. Ситников

6225. Об универсальных множествах. Тайманов А. Д., Матем. сб., 1955, 37 (79), № 1, 117—120

Доказана следующая теорема: Существует в E^3 такое локально компактное двумерное множество U, что для любого плоского локально компактного множества ε' найдется число a, для которого пересечение плоскости $x = a$ с множеством U равно множеству ε'.

Утверждается, что при замене двумерных множеств n-мерными аналогичное множество U (размерности n) может быть построено тем же способом в E^{n+1}.

А. С. Пархоменко

6226. Гомологические инварианты топологических пространств. Бокштейн М. Ф., Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 3—80

В данном томе помещена часть 1 работы «Универсальные поля коэффициентов для гомологических инвариантов топологических пространств», исследующая вопросы об определимости групп и колец гомологий (гл. I) и гомологической размерности (гл. II) топологического пространства по любому полю коэффициентов их значениями по некоторым конкретным полям коэффициентов. При этом используются те определения (они приведены в § 1 гл. I) колец и групп $\bigtriangledown$-гомологий локально бикомпактного хаусдорфова топологического пространства (основанные на конечных, открытых, мультипликативных покрытиях пространства и взятые относительно особых подкомплексов нервов этих покрытий), которые были введены П. С. Александровым (Уч. зап. МГУ, 1940, вып. 45, 3—60). Гомологическая размерность понимается тоже в смысле П. С. Александрова, но ей придается следующая $\bigtriangledown$-форма: $\bigtriangledown$-размерность компакта или бикомпакта A по группе коэффициентов G есть наибольшее из таких целых чисел q (в частности, бесконечность!), что найдется открытое подпространство $A' \subseteq A$, q-мерная группа $\bigtriangledown$-гомологий которого по G нетривиальна.

В § 2 показывается, что целочисленные $\bigtriangledown$-кольца недостаточны для определения $\bigtriangledown$-колец по другим полям коэффициентов, причем это имеет место даже в случае многообразий. Для этого, исходя из того, что $\bigtriangledown$-кольцо для ориентируемого многообразия (и вообще для любого полиэдра) совпадает (доказательство этого приводится в статье) с кольцом связности в смысле Александера его симплициального подразделения, а это последнее кольцо, как показал Чех, изоморфно кольцу пересечений рассматриваемого многообразия, автор строит пример двух трехмерных ориентируемых многообразий, целочисленные кольца пересечений которых изоморфны, в то время как их кольца пересечений mod 2 отличны. В качестве первого многообразия берется многообразие, построенное еще Пуанкаре и представляющее собой куб, противоположные стороны которого идентифицированы после поворота одной относительно другой на 90° в одном и том же направлении, для построения же второго многообразия берутся два экземпляра трехмерного

проективного пространства, из каждого вырезается внутренность некоторого шара и полученные ограниченные многообразия склеиваются по сферам, ограничивающим вырезанные шары.

В § 3 автор находит универсальную систему ∇-колец, т. е. систему, знание которой дает возможность вычислить ∇-кольцо по любому полю коэффициентов. Такой системой оказывается так называемый модульный ∇-спектр данного пространства A. Он состоит из множества всех ∇-колец $\bmod m$, $m=0, 1, 2, 3, \ldots$, пространства A и всех гомоморфизмов $\pi_m^{m'}$ и $\bar{\omega}_{m'}^{m}$ (m является делителем m') между этими кольцами, определенных следующим образом: $\pi_m^{m'}$ каждому ∇-циклу по модулю m' ставит в соответствие этот же ∇-цикл, приведенный по модулю m, а $\bar{\omega}_{m'}^{m}$ каждому ∇-циклу по модулю m ставит в соответствие ∇-цикл по модулю m', полученный из данного умножением на m'/m и приведением по модулю m'. Универсальность модульного ∇-спектра основывается на возможности представления ∇-цикла по данному полю коэффициентов R как линейной комбинации с коэффициентами из R от конечного числа целочисленных и модульных ∇-циклов; в силу этого и элемент ∇-кольца по R представляется в виде так называемой ∇-формы, т. е. линейной комбинации элементов ∇-колец $\bmod m$, $m=0, 1, 2, 3, \ldots$ с коэффициентами из R; с помощью гомоморфизмов $\pi_m^{m'}$ и $\bar{\omega}_{m'}^{m}$ множество ∇-форм можно разбить на классы эквивалентных между собой ∇-форм, и кольцо этих классов и оказывается изоморфным ∇-кольцу пространства A по R.

Одновременно получается универсальная система и для групп ∇-гомологий: q-мерные группы ∇-гомологий по любому полю коэффициентов определяются заданием модульного спектра ∇-групп, т. е. заданием q-мерных групп ∇-гомологии $\bmod m$ ($m=0, 1, 2, \ldots$) и гомоморфизмов $\pi_m^{m'}$ и $\bar{\omega}_{m'}^{m}$. В отличие от теоремы Стинрода об универсальности целочисленных групп ∇-гомологий ($m=0$), в которой для определения q-мерной ∇-группы по данному полю коэффициентов требуется знать не только q-мерную, но и $(q+1)$-мерную целочисленные ∇-группы гомологии, в указанном результате хотя и используются, кроме целочисленных ∇-групп, также и ∇-группы $\bmod m$, $m=2, 3, \ldots$, но все они могут быть одной и той же размерности q. Далее, показывается, что универсальностью обладает и уменьшенная совокупность ∇-колец или ∇-групп с гомоморфизмами $\pi_m^{m'}$ и $\bar{\omega}_{m'}^{m}$, получающаяся из полной совокупности, если числу m придавать только значение нуль и значения, равные степеням простых чисел (этот результат был указан автором в его первоначальных заметках в Докл. АН СССР, 1942, **37**, № 9, 275—278; 1943, **40**, № 9, 387—390). Наконец, в последнем § 5 гл. 1 доказывается, что модульный спектр q-мерных ∇-групп данного пространства (как группы по всем модулям m, так и соответствующие гомоморфизмы) можно определить целочисленными ∇-группами размерностей q и $q+1$ этого пространства, что, в силу предыдущих результатов, дает новое доказательство упомянутой теоремы Стинрода.

С помощью этих результатов в гл. II доказывается, что для вычисления ∇-размерности пространства A по данной группе коэффициентов G достаточно знать ∇-размерность A по следующей счетной системе S групп коэффициентов: а) по аддитивной группе R рациональных дробей; б) по аддитивным группам R_p рациональных дробей, в знаменатель которых не входит множителем простое число p; в) по циклическим группам C_p простого порядка p; г) по квазициклическим p-группам Q_p, т. е. приведенным по модулю 1 аддитивным группам рациональных дробей, знаменатели которых суть степени простого числа p.

Именно, группе G ставится в соответствие подсистема S_G системы S, определенная следующим образом:

1) $R \in S_G$ тогда и только тогда, когда G содержит элемент бесконечного порядка;

2) $R_p \in S_G$ в том и только в том случае, когда G содержит элемент бесконечного порядка, не являющийся суммой элемента конечного порядка и элемента, делящегося на простое число p (т. е. являющегося p-кратным некоторого элемента этой группы);

3) $C_p \in S_G$ в том и только в том случае, когда G содержит элемент конечного порядка, не делящийся на простое число p;

4) $Q_p \in S_G$ тогда и только тогда, когда G содержит элемент простого порядка p. Тогда ∇-размерность $\mathrm{Dim}_G A$ пространства A по G есть максимум значений ∇-размерности A по группам коэффициентов, входящим в S_G. Для размерности $\bmod m$ этот результат был получен автором (Fundam. math., 1947, **34**, 306—310).

∇-размерности для групп коэффициентов из S связаны неравенствами

$$\mathrm{Dim}_R A \leqslant \mathrm{Dim}_{R_p} A \geqslant \mathrm{Dim}_{C_p} A \geqslant \mathrm{Dim}_{Q_p} A,$$

$$\mathrm{Dim}_{Q_p} A \geqslant \mathrm{Dim}_{C_p} A - 1,$$

$$\mathrm{Dim}_{Q_p} A \leqslant \max(\mathrm{Dim}_R A,\ \mathrm{Dim}_{R_p} A - 1),$$

$$\mathrm{Dim}_{R_p} A \leqslant \max(\mathrm{Dim}_R A,\ \mathrm{Dim}_{Q_p} A + 1).$$

Аналогичные результаты имеют место и для понятия циклической ∇-размерности локально бикомпактного пространства A по группе коэффициентов G; эта размерность есть наибольшее из таких чисел q, что q-мерная ∇-группа пространства A по G нетривиальна.

Г. С. Чогошвили

6227. Наименьшее число совпадений. Ширмер (Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten. Schirmer Helga), J. reine und angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 21—39 (нем.)

Дается подробное построение теории совпадений для случая отображений одного компактного ориентируемого и триангулируемого n-мерного многообразия M^n в другое такое же многообразие M^n. Большинство результатов было сформулировано без доказательства (без предположения о триангулируемости многообразий) Вейером (РЖМат, 1955, 3125, 4303, 4304).

В § 1 определяется индекс изолированного совпадения и доказывается, что любые два отображения f, g (указанного выше вида) можно малой деформацией перевести в такие отображения f', g', которые имеют лишь конечное число совпадений. В § 2 устанавливается, что если отображения f_0, g_0, так же как и соответственно гомотопные им отображения f_1, g_1, имеют лишь конечное число совпадений, то соединяющие деформации f_t, g_t можно выбрать такими, что при любом t отображения f_t, g_t имеют лишь конечное число совпадений. В § 3 устанавливается, что при условиях, рассмотренных в § 2, сумма индексов совпадений для отображений f_0, g_0 равна сумме индексов для отображений f_1, g_1. Эта сумма называется алгебраическим числом совпадений; она всецело определяется гомотопическими классами рассматриваемых отображений. В § 4 совпадения разбиваются на классы.

Два совпадения p, q отображений f, g называются эквивалентными, если существует такой путь ν, соединяющий точки p и q, что пути $f\circ\nu$ и $g\circ\nu$ гомотопны между собой. Доказывается, что число классов всегда конечно. Для каждого класса определяется индекс (равный сумме индексов совпадений, принадлежащих этому классу, если рассматриваемые отображения f, g имеют лишь конечное число совпадений). Доказывается, что для каждого целого $j\neq 0$ число классов, имеющих индекс j, является гомотопическим инвариантом пары отображений f, g. В §§ 5 и 6 вычисляется при $n\geqslant 3$ наименьшее число μ геометрически различных совпадений для отображений, соответственно гомотопных заданным отображениям f, g; это число μ оказывается равным числу существенных классов совпадений для отображений f, g (класс совпадений называется существенным, если его индекс отличен от нуля). В случае, когда отображения f и g гомотопны между собой, число μ оказывается равным единице. Наконец, в последнем, § 7 доказывается при $n\geqslant 3$ следующая теорема реализации: Пусть μ — число существенных классов совпадений отображений f, g и $j_1, j_2, \ldots, j_\mu$ — индексы этих классов; пусть, далее, $M_0, M_1, \ldots, M_\mu$ — конечные подмножества многообразия M^n и каждой точке каждого из этих подмножеств поставлено в соответствие целое число (индекс), причем так, что сумма индексов для точек множества M_i равна j_i (где $j_0=0$). Тогда существуют такие отображения f', g', соответственно гомотопные f и g, что совпадениями отображений f' g' являются точки множеств M_i и только эти точки, а предписанные индексы являются индексами этих совпадений. В. Г. Болтянский

6228. Теория пучков (I). Ямадзаки (Faisceau の理論. I. 山崎圭次郎), 數學, Sugaku, 1955, 7, № 2, 101—122 (японск.)

Начало систематического изложения теории пучков. В первой главе вводятся стинродовские локальные коэффициенты и основанные на них группы когомологий. Во второй главе определяются перекрытия (couvertures) в смысле Лерэ и пучки (cagarpaces) в смысле Картана. В третьей, последней главе, рассматриваются понятия, необходимые для определения групп когомологий с коэффициентами в пучках, а также излагается теория чеховских групп когомологий. Лю Чун Хо

6229. Группа Серра $E_2^{p,q}$. Бартоломи (The Serre group $E_2^{p,q}$. Bartholomay Anthony F.), Portugaliae math., 1956, 15, № 1—2, 31—34 (англ.)

Доказано, что член $E_2^{p,q}$ спектральной последовательности, соответствующей градуированной дифференциальной группе A с возрастающей фильтрацией $A^0\subset A^1\subset\ldots\subset A^p\subset\ldots$ с дифференциалом степени — 1, совпадает с образом гомоморфизма

$$H_{p+q}(A^p/A^{p-2})\to H_{p+q}(A^{p+1}/A^{p-1}),$$

индуцированного составным отображением вложения $(A^p/A^{p-2})\to(A^p/A^{p-1})\to(A^{p+1}/A^{p-1})$. М. М. Постников

6230. Об асферичности клеточных разбиений высших размерностей. Вада (On the asphericity of the higher dimensional complex. Wada Hidekazu), Tôhoky Math. J., 1955, 7, № 1—2, 9—13 (англ.)

Доказывается теорема: Для того чтобы неасферичное n-мерное ($n\geqslant 2$) клеточное разбиение L можно было присоединением n-мерных клеток сделать асферичным, необходимы и достаточны следующие условия:

1. $\pi_r(L)=0$ при $1<r<n-1$; 2. $\pi_{n-1}(L)$ есть свободный $\pi_1(L)$-модуль; 3. $H_n(\tilde{L})=0$, где L — универсальное накрывающее пространство над L.

С. С. Рышков

6231. О гомотопических группах некоторых пар и триад. Джеймс (On the homotopy groups of certain pairs and triads. James I. M.), Quart J. Math., 1954, 5, № 20, 260—270 (англ.)

Пусть (X, A, B) — такая триада, что пространства X, A, B, $C=A\cap B$ линейно связны; $\pi_i(A, C)=\pi_i(X, B)=0$ при $i\leqslant n$, $n\geqslant 3$; $\pi_i(B, C)=0$ при $i\leqslant e$; $\pi_i(C)=0$ при $i\leqslant m$, $m\geqslant 1$; группа $\pi_n(A, C)$ свободна и естественный гомоморфизм $\pi_n(A, C)\to\pi_n(X, B)$ является изоморфизмом. Тогда, если $H_r(A, C)=0$ при $n+1\leqslant r\leqslant p$ и $H_r(X, B)=0$ при $n+1\leqslant r\leqslant p+1$, где $p=e+n-1+\min(e, m)$, то при $n+2\leqslant r\leqslant p$ для гомоморфизма P: $\pi_{r-n+1}(B, C)\otimes\pi_n(A, C)\to\pi_r(X; A, B)$, определяемого произведение Уайтхеда в гомотопических группах триад, существует обратное слева отображение (и, следовательно, отображение P мономорфно). Если же $H_r(A, C)=0$ при $n+1\leqslant r\leqslant q$ и $H_r(X, B)=0$ при $n+1\leqslant r\leqslant q+1$, где $q=e+n-1+\min(e, m, n-1)$, то при $n+2\leqslant r\leqslant q$ отображение P изоморфно.

Из этого основного результата легко получаем: если K — такое клеточное разбиение, что $\pi_i(K)=0$, при $i<m$, $m\geqslant 1$, то для любого $n\geqslant 3$ и любого $r<\min(2m+n,\ 2n-2)$ группа $\pi_r(K^n, K^{n-1})$ изоморфна группе $\pi_n(K^n, K^{n-1})\otimes(\pi_{r-n+1}(K^{n-1})+\pi_{r-1}(S^{n-1}))$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что для $0\leqslant q\leqslant\min(p-3,\ 2m)$ группы $H_{p,q}(K)$, построенные Масси (РЖМат, 1953, 909), изоморфны прямой сумме $H_p(K, G_h)+H_p(K, \pi_{n+1}(K))$, где $G_q=\pi_{n+q}(S^n)$ при большом n.

Кроме того, оказывается возможным получить некоторую информацию о группах $\pi_r(Y^*, Y)$, где Y — произвольный односвязный полиэдр, а Y^* получается из Y приклеиванием n-мерной клетки. Например, имеет место следующее предложение: если $\pi_i(Y^*)=0$ при $i\leqslant e$, то для $q=\min(3n-4,\ 2e+n-1)$ имеет место точная последовательность

$$\pi_{q-1}(S^{n-1})\to\ldots\to\pi_{r-1}(S^{n-1})\to\pi_r(Y^*, Y)\to\to\pi_{r-n+1}(Y^*)\to\pi_{r-2}(S^{n-1})\to\ldots$$

М. М. Постников

6232. Конструкции над комплексами колец. Мур (Constructions sur des complexes d'anneaux. Moore J. C.), Sémin. H. Cartan, École norm. supér., 1954/1955, 7, № 12, 1—6 (франц.)

Комплексом колец автор называет свободный FD-комплекс (в смысле Эйленберга—Маклейна; РЖМат, 1954, 2907), каждая однородная составляющая которого является алгеброй с единицей над основным кольцом Λ (которое предполагается кольцом главных идеалов). Граничные операторы ∂_i и операторы вырождения s_i предполагаются при этом кольцевыми гомоморфизмами. FD-комплекс $U=\sum U_q$ называется модулем над комплексом колец $R=\sum R_q$, если каждая однородная составляющая U_q комплекса U является унитарным R_q-модулем, причем $\partial_i(ru)=\partial_i r\cdot\partial_i u$, $s_i(ru)=s_i r\cdot s_i u$ для любых элементов $r\in R_q$, $u\in U_q$. Тройка $(R, \bar{U}, U)$, где R — комплекс колец, $\bar{U}$ — градуированный Λ-модуль и U — такой R-модуль с пополнением (пополнения R-модулей определяются обычным образом), что $U_q=R_q\otimes\bar{U}_q$ для всех q, называется конструкцией, если $s_i(1\otimes\bar{U}_q)\subset 1\otimes\bar{U}_{q+1}$. В этом случае модуль $\bar{U}$ естественным образом определяется как FD-комплекс с пополнением ε. Конструкция $(R, \bar{U}, U)$ называется скрещенным произведением, если $\partial_i(1\otimes\bar{U}_{q+1})\subset 1\otimes\bar{U}_q$ для всех $i>0$. Скрещенное произведение $(R, \bar{U}, U)$ называется W-конструкцией, если отображения $\partial_0: 1\otimes\bar{U}_{q+1}\to U_q$ и $\varepsilon:\bar{U}_0\to\Lambda$ являются

изоморфизмами. Доказывается, что для любого комплекса колец R существует (с точностью до изоморфизма единственная) W-конструкция $(R, \bar{U}, U)$. Модуль $\bar{U}$ для этой конструкции обозначается через $W(k)$; он совпадает с модулем $W(R)$, построенным Эйленбергом и Маклейном (РЖМат, 1954, 2907).

М. М. Постников

6233. Сравнение B-конструкций с W-конструкциями и комплексами $K(\Pi, n)$. Мур (Comparaison de la bar construction à la construction W et aux complexes $K(\Pi, n)$. Moore J. C.), Sémin. H. Cartan, École norm. supér., 1954/1955, 7, № 13, 1—11 (франц.)

Пусть $(R, \bar{U}, U)$ — произвольная конструкция в смысле предыдущего сообщения (реф. 6232), а U_N и R_N — нормализованные комплексы U и R соответственно. Комплекс U_N естественным образом определяется как DGA-модуль над DGA-алгеброй R_N. Обозначая через $\bar{U}^p$ подкомплекс комплекса $\bar{U}$, порожденный элементами степени p, определим в комплексе U фильтрацию F_p, положив $F_p(U) = R \otimes \bar{U}^p$. Эта фильтрация индуцирует некоторую фильтрацию комплекса U_N. Пусть $\{E_r\{U_N\}\}$ — соответствующая этой фильтрации спектральная последовательность. Оказывается, что если $H_0(R_N) = \Lambda$, то $E_1(U_N) \approx H(R_N) \otimes \bar{U}_N$, и, следовательно, $E_2(U_N) \approx H(H(R_N) \otimes \bar{U}_N)$. С помощью этой теоремы легко доказываются результаты Эйленберга—Маклейна о связи между B- и W-конструкциями РЖМат, 1954, 2907).

М. М. Постников

6234. Когомологические операции. I. Картан (Opérations cohomologiques. I. Cartan H.), Sémin. H. Cartan, École norm. supér., 1954/1955, 7, № 14, 1—12 (франц.)

Устанавливается, следуя идеям Серра (РЖМат, 1954, 3271), взаимно однозначное соответствие между когомологическими операциями, определенными в полных полусимплициальных комплексах, и элементами групп $H^q(\Pi, n; G)$. Специально рассматривается случай относительных когомологий. Оказывается, что операция $T(u): H^{n+1}(X/Y; \Pi) \to H^{q+1}(X/Y; G)$, соответствующая элементу $u \in H^{q+1}(\pi, n+1; G)$, и операция $T(\sigma u): H^n(Y; \Pi) \to H^q(Y; G)$, соответствующая элементу $\sigma u \in H^q(\Pi, n; G)$, где σ — операция надстройки для классов когомологий, связаны формулой $\delta \circ T(\sigma u) = T(u) \circ \delta$, где δ — кограничный оператор. Особое внимание уделено аддитивным операциям (т. е. операциям, переводящим сумму в сумму). В частности, доказано, что некоторая операция аддитивна, если соответствующий элемент группы $H^i(\Pi, n; G)$ имеет вид σu, где $u \in H^{q+1}(\Pi, n+1, G)$. Если $pG = 0$, где p — некоторое простое число, то когомологическая операция тогда и только тогда аддитивна, когда соответствующий элемент группы $H^q(\Pi, n; G)$ ортогонален (в понятном смысле) подпространству разложимых элементов пространства $H_q(\Pi, n; Z_p)$.

М. М. Постников

6235. Когомологические операции. II. Картан (Opérations cohomologiques. II. Cartan H.), Sémin. E. Cartan, École norm. supér., 1954/1955, 7, № 15, 1—10 (франц.)

В связи с последним результатом предыдущего сообщения (реф. 6234) особый интерес представляет изучение фактор-пространств $A_q(\Pi, n; Z_p)$ пространств $H_q(\Pi, n; Z_p)$ по подпространству D_q разложимых элементов. Из полученного автором ранее описания алгебры $H_*(\Pi, n; Z_p)$ (РЖМат, 1957, 5428) без труда следует, что пространство $A_*(\Pi, n; Z_p) = \sum_{q \geqslant 0} A_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$ является прямой суммой групп $\Pi/p\Pi$ и ${}_p\Pi$. Слагаемые вида $\Pi/p\Pi$ (соответственно вида ${}_p\Pi$) взаимно однозначно соответствуют словам высоты n первого (соответственно второго) рода, получающимся из допустимых слов приписыванием слева нескольких символов γ_p. Отсюда вытекает, что для $n \geqslant q(p-1)$ индуцированное надстройкой отображение $A_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \to A_{n+q+1}(\Pi, n+1; Z_p)$ является изоморфизмом. В свою очередь из последнего утверждения легко следует, что если $pG = 0$, то элемент группы $H^q(\Pi, n, G)$ тогда и только тогда является надстройкой, когда он ортогонален подпространству D_q. Таким образом, если $pG = 0$, то некоторая когомологическая операция тогда и только тогда аддитивна, когда соответствующий элемент группы $H^q(\Pi, n, G)$ является надстройкой.

В общем случае вопрос о необходимости этого условия остается открытым.

Гомологической операцией T автор называет правило, по которому каждому полному полусимплициальному комплексу X соответствует некоторый гомоморфизм $T(X): H_{n+q}(X; Z_p) \to H_n(X; Z_p)$ (n и q — данные целые числа). Для произвольной группы Π любая гомологическая операция естественным образом определяет некоторую аддитивную когомологическую операцию $H^n(X; \Pi) \to H^{n+q}(X, \Pi/p\Pi)$. Соответствующий этой когомологической операции элемент группы $H^{n+q}(\Pi, n; \Pi/p\Pi) \approx \mathrm{Hom}(H_{n+q}(\Pi, n; Z_p), \Pi/p\Pi)$ определяется отображением $T(K(\Pi, n))$ (следует иметь в виду, что $H_n(\Pi, n; Z_p) \approx \Pi/p\Pi$). Это отображение индуцирует некоторое естественное отображение $s: A_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \to A_n(\Pi, n; Z_p)$. Оказывается, что построенное соответствие между операциями T и отображениями s взаимно однозначно.

Пусть $n = 2k$, где k — произвольное целое число $\geqslant 1$. Отображения γ_p определяют изоморфное вложение пространства $A_{2k}(\Pi, 2k; Z_p)$ в пространство $A_{2kp}(\Pi, 2k; Z_p)$. Следовательно, существует такое отображение s_{2k}: $A_{2kp}(\Pi, 2k; Z_p) \to A_{2k}(\Pi, 2k; Z_p)$, что $s \circ \gamma_p = 1$. Подробно изучается соответствующая этому отображению гомологическая операция T_{2k}; в частности, указывается ее конструктивное определение. В когомологиях ей соответствует операция возведения в степень p. Пусть теперь $n \geqslant 2k$. Определим отображение s_n: $A_{n+2k(p-1)}(\Pi, n; Z_p) \to A_n(\Pi, n; Z_p)$, положив $s_n = \sigma^{n-2k} \circ s_{2k} \circ (\sigma^{n-2k})^{-1}$, где σ — индуцированное надстройкой отображение (заметим, что для $n \geqslant 2k$ отображение σ: $A_{n+2k(p-1)}(\Pi, n; Z_p) \to A_{n+2k(p-1)+1}(\Pi, n+1; Z_p)$ является изоморфизмом). Пусть T_n — гомологическая операция, соответствующая отображению s_n. Оказывается, что соответствующая когомологическая операция $H^q(X; Z_p) \to H^{n+2k(p-1)}(X; Z_p)$ совпадает с приведенной степенью P_q^k в смысле Стинрода.

М. М. Постников

6236. Когомологические операции. III. Картан (Opérations cohomologiques. III. Cartan H.), Sémin. H. Cartan, École norm., supér., 1954/1955, 7, № 16, 1—14 (франц.)

Пусть $St_p^a = P_p^k$, если $a = 2k(p-1)$, и $St_p^a = \beta_p' \circ P_p^k$, если $a = 2k(p-1)+1$, где β_p': $H^q(X, G) \to H^{q+1}(X, G)$ — гомоморфизм Бокштейна (предполагается, что $pG = 0$). Итерированная степень St_p^I, где $I = (a_1, a_2, \ldots)$ — последовательность неотрипательных чисел (среди которых имеется только конечное число отличных от нуля), сравнимых с нулем или единицей по модулю

2 ($p-1$), определяется формулой $St_p^I = St_p^{a_1} \circ St_p^{a_2} \circ \ldots$. Она является аддитивной перестановочной с надстройкой когомологической операцией $H^n(X, G) \to H^{n+q(I)}(X, G)$, где $q(I) = \sum a_i$. Последовательность I называется допустимой, если $a_i \geqslant pa_{i+1}$ для любого i. Допустимая последовательность называется последовательностью первого рода, если последний отличный от нуля ее член больше единицы, и второго рода — в противном случае. Каждой допустимой последовательности I' второго рода естественным образом соответствует некоторая допустимая последовательность первого рода и обратно.

Пусть $A^*(\Pi, n; G)$ — подпространство аддитивных (т. е. соответствующих аддитивным операциям) элементов пространства $H^*(\Pi, n; G)$. Оказывается, что для любой допустимой последовательности I первого рода итерированная степень St_p^I определяет мономорфные отображения пространства $H^n(\Pi, n; G)$, где $n \geqslant n(I)\left(n(I) = \left[\frac{pa_1}{p-1}\right] + 1 - q(I)\right)$ и пространства $H^{n+1}(\Pi, n; G)$, где $n \geqslant n(I')$, в пространство $A^*(\Pi, n; G)$; образы этих отображений обозначаются через $A^I(\Pi, n; G)$ и $A^{I'}(\Pi, n; G)$ соответственно. Основной результат: пространство $A^*(\Pi, n; G)$ является прямой суммой всевозможных подпространств, вида $A^I(\Pi, n; G)$ и $A^{I'}(\Pi, n; G)$. Подробно изучена связь этого разложения с построенным в предыдущем сообщении (реф. 6235) разложением пространства $A_*(\Pi, n; G)$. Полученное описание пространства $A^*(\Pi, n; G)$ позволяет найти все когомологические операции $H^n(X; G) \to H^q(X; G)$ (в предположении, что $pG = 0$). Все эти операции по существу сводятся к операциям Стинрода.

М. М. Постников

6237. Формула произведения для операций Стинрода. Картан (La formule du produit pour les opérations de Steenrod. Cartan H. J.), Sémin. H. Cartan, Ecole norm. supér., 1954/1955, 7, № 16 bis, 1—5 (франц.)

Для степеней Стинрода доказывается формула, обобщающая известную формулу Картана для квадратов Стинрода. Доказательство содержит некоторые неточности, исправленные во втором издании (РЖМат, 1957, 5431).

М. М. Постников

6238. Операции в группах когомологий над полем действительных чисел. Том (Opérations en cohomologie réelle. Thom R.), Sémin. H. Cartan, École norm. supér., 1954/1955, 7, № 17, 1—10 (франц.)

Пусть E — произвольный полиэдр (автор говорит «пространство»). Как известно (см., например, реф. 6235), каждому классу когомологий $x \in H^n(E; G)$, где G — некоторая группа, соответствует (с точностью до гомотопии однозначно определенное) отображение $f: E \to K(G, n)$, для которого $x = f^*(c)$, где c — фундаментальный класс пространства $K(G, n)$. Так как пространство $K(G, n)$ является базой ациклического расслоенного пространства (со слоем $K(G, n-1)$, то отображение f определяет над E некоторое расслоенное пространство Q_x. Пространства Q_x автор называет каноническими расслоениями, соответствующими классу x. Основная цель работы — указать некоторые применения этого понятия.

Назовем класс когомологий $y \in H^q(E; G')$ подчиненным классу x, если для любого отображения $f: A \to E$ произвольного пространства A в пространство E из $f^*(x) = 0$ следует, что $f^*(y) = 0$. Оказывается, что класс y тогда и только тогда подчинен классу x, когда $p^*(y) = 0$, где p — проекция канонического расслоения Q_x. Этот общий результат применяется к изучению подчиненных классов в случае, когда каждая из групп G и G' является группой R действительных чисел.

Если размерность n класса $x \in H^n(E, R)$ четна, то слой $K(R, n-1)$ расслоения Q_x является гомологической $(n-1)$-мерной сферой (над полем R), и, следовательно, из точности последовательности Гизина вытекает, что $p^*(y) = 0$ тогда и только тогда, когда класс y является ν-кратным класса x. Если n нечетно, то, как показывают соответствующие примеры, класс y, вообще говоря, не является ν-кратным класса x. В этом случае описание классов y, подчиненных классу x, автор получает с помощью теории Хирша (РЖМат, 1957, 260). Та же теория применяется для описания классов, подчиненных нескольким классам x.

С помощью расслоений Q_x получается также следующее описание классов когомологий, являющихся сферическими аннуляторами. Класс $x \in H^n(E, R)$ тогда и только тогда является сферическим аннулятором, когда существует такая последовательность канонических расслоений

$$E \xleftarrow{P_1} Q_{u_1} \xleftarrow{P_2} Q_{u_2} \xleftarrow{P_3} \ldots \xleftarrow{P_r} Q_{u_r},$$

что $\dim u_i < n$, $i = 1, \ldots, r$ и $p^*(x) = 0$, где $p = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_r$. Отсюда вытекает, что если $H^i(E, R) = 0$, когда $0 < i \leqslant \frac{n}{3} + \frac{1}{2}$, то подгруппа сферических аннуляторов группы $H^n(E, R)$ порождается разложимыми элементами.

Наконец, с помощью пространств Q_x доказывается, что кольцо когомологий (над полем R) расслоенного на нечетномерные сферы пространства Y зависит только от характеристического класса x (над полем R) этого пространства. Именно: $H^*(Y, R) \approx H^*(Q_x, R)$.

М. М. Постников

6239. Гомотопии комплексов полугрупп. I. Мур (Homotopie des complexes monoïdaux. Moore J. C.), Sémin. H. Cartan, École norm. supér., 1954/1955, 7, № 18, 1—8 (франц.)

Комплексом полугрупп называется полный полусимплициальный комплекс Γ, для которого совокупность Γ_q симплексов любой размерности $q \geqslant 0$ является полугруппой с единицей e_q, причем операции d_i взятия грани и операции s_i построения вырожденных симплексов являются гомоморфизмами (переводящими единицу в единицу). Для любого комплекса полугрупп Γ комплекс $R(\Gamma) = \sum R(\Gamma_q)$, где $R(\Gamma_q)$ — целочисленное кольцо полугруппы Γ_q, является, очевидно, комплексом колец (в смысле сообщения 12, см. реф. 6232). В этом комплексе естественным образом определяется пополнение $\varepsilon: R(\Gamma) \to Z$. Комплекс полугрупп Γ называется инволютивным, если для любого $q \geqslant 0$ в полугруппе Γ_q отмечен антиавтоморфизм $x \to \bar{x}$ (инволюция) порядка 2, согласованный с операциями d_i и s_i. Инволютивный комплекс Γ называется комплексом с гомотопией, если 1) для любой системы элементов $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{q+1} \in \Gamma_q$, для которой $d_i x_j = d_{j-1} x_i$; при $i < j$, где $i \neq k$, $j \neq k$, существует такой элемент $x \in \Gamma_{q+1}$, что $d_i x = x_i$ для любого $i \neq k$ 2) для любых элементов $x \in \Gamma_{q+1}$, y, y', $y'' \in \Gamma_q$, для которых $d_k x = y' y \bar{y} y''$, $d_j(y\bar{y}) = 0 (0 \leqslant j \leqslant q)$ существует такой элемент $z \in \Gamma_{q+1}$, что $d_j z = d_j x$, если $j \neq k$ и $d_k z = y' y''$. Примером комплекса с гомотопией является, например, сингулярный комплекс $\Omega(X)$ пространства петель $L(X)$ некоторого линейносвязного пространства X. Любой комплекс групп (т. е. комплекс Γ, для которого при любом $q \geqslant 0$ полугруппа Γ_q является группой) также является комплексом с гомо-

топией (инволюции в обоих примерах определяются естественным образом).

Любому комплексу полугрупп Γ отнесем полугруппы $\bar{\pi}_q(\Gamma)$, положив $\bar{\pi}_0(\Gamma)=\Gamma_0$, $\pi_q(\Gamma)=\bigcap_{0\leqslant j<q}\operatorname{Ker} d_j$, $(q>0)$. Пусть N_q — ядро гомоморфизма $\bar{\pi}_q(\Gamma)\to\bar{\pi}_{q-1}(\Gamma)$, индуцированного отображением d_q. Оказывается, что если Γ является комплексом с гомотопией, то в N_q естественным образом определяется отношение конгруэнтности, фактор-группа по которому является группой. Эта группа называется q-й гомотопической группой комплекса Γ и обозначается через $\pi_q(\Gamma)$. При $q>0$ группа $\pi_q(\Gamma)$ абелева. Если $\Gamma=\Omega(X)$, то $\pi_q(\Gamma)\approx\pi_{q+1}(X)$. М. М. Постников

6240. Гомотопии комплексов полугрупп. II. Мур (Homotopie des complexes monoïdaux. II. Moore J.C.), Sémin. H. Cartan, Ecole norm. supér., 1954/1955, 7, № 19, 1—7 (франц.)

Пусть Γ — произвольный комплекс полугрупп и пусть $\Gamma^{\#}$ — совокупность всех его симплексов положительных размерностей. Мы будем рассматривать $\Gamma^{\#}$ как комплекс полугрупп, считая размерности всех его симплексов уменьшенными на единицу (и соответственным образом уменьшив индексы у операторов взятия грани и построения вырожденного симплекса). Тогда отображение $d_0:\Gamma_{q+1}\to\Gamma_q$ можно рассматривать как (гомоморфное и симплициальное) отображение $p:\Gamma_q^{\#}\to\Gamma_q$. Пусть $\Gamma^{(1)}$ — ядро отображения p. Очевидно, что если Γ является комплексом групп, то тройка $(R(\Gamma^{(1)}), R(\Gamma), R(\Gamma^{\#}))$ тогда и только тогда является W-конструкцией (реф. 6239), когда $\pi_0(\Gamma)=0$. Аналогичный результат имеет место и для итерированных W-конструкций.

Комплекс Γ с гомотопией называется минимальным, если $\pi_q(\Gamma)=\bar{\pi}_q(\Gamma)$ для всех q. В этом случае все полугруппы Γ_q являются группами. Если, кроме того, $\pi_q(1)=0$ для всех $q\neq n>0$, то все группы Γ_q абелевы (при $n=0$ необходимо потребовать, чтобы группа $\pi_0(\Gamma)$ была абелевой). Для любой абелевой группы Π и любого $n\geqslant 0$ существует (с точностью до изоморфизма только один) минимальный комплекс Γ, для которого $\pi_q(\Gamma)=0$, если $q\neq n$, и $\pi_n(\Gamma)\approx\Pi$. Этот комплекс обозначается через $\Gamma(\Pi, n)$. Оказывается, что $K(\Pi, n)=R(\Gamma(\Pi, n))$. Основной результат: любой минимальный комплекс Γ с абелевыми группами Γ_q является прямым произведением комплексов $\Gamma(\pi_n(\Gamma), n)$. М. М. Постников

6241. Гомотопические группы букетов сфер. Серр (Groupes d'homotopie des bouquets de sphères. Serre J.-P.), Sémin. H. Cartan, École norm. supér., 1954/1955, 7, № 20, 1—7 (франц.)

Сообщение в основном посвящено изложению статей Хилтона (РЖМат, 1955, 5691; 1956, 3733; 1957, 2967). М. М. Постников

6242. Системы Постникова и комплексы полугрупп. Мур (Systèmes de Postnikov et complexes monoïdaux. Moore J. C.), Sémin. H. Cartan, École norm. supér., 1954/1955, 7, № 21, 1—12 (франц.)

Пусть Γ — произвольный комплекс полугрупп. Для любого $q>0$ положим $\overline{W}_q(\Gamma)=\Gamma_{q-1}\times\ldots\times\Gamma_0$. Систему $\overline{W}(\Gamma)$ полугрупп $\overline{W}_q(\Gamma)$ обратим в комплекс, положив

$$d_0(x_{q-1}, \ldots, x_0)=(x_{q-2}\ldots, x_0),$$

$$d_i(x_{q-1}, \ldots, x_0)=$$

$$=(d_{i-1}x_{q-1},\ldots, d_1x_{q-i+1}, (d_0x_{q-i})\,x_{q-i-1}, x_{q-i-2},\ldots x_0),$$

$$i\geqslant 1,$$

$$s_i(x_{q-1}, \ldots, x_0)=(s_{i-1}x_{q-1}, \ldots$$

$$\ldots, s_0x_{q-i}, e_{q-i}, x_{q-i-1}, \ldots, x_0),\ i\geqslant 0.$$

Рассмотрим отображение $\tau:\overline{w}(\Gamma)\to\Gamma$, определенное формулой $\tau(\tau_q, \ldots, x_0)=x_q$. Любому симплициальному отображению $f:Y\to\overline{W}(\Gamma)$, где Y — произвольный полный полусимплициальный комплекс, отнесем комплекс $W_f(\Gamma)$, в котором симплексами размерности q являются пары (x, y), где $x\in\Gamma_q$, $y\in Y_q$, а граничные операторы и операторы вырождения определяются формулами $d_0(x, y)=((d_0x)\cdot(fg), d_0y)$, $d_i(x, y)=(d_ix, d_iy)$, $(i>0)$, $s_i(x, y)=(s_ix, s_iy)$, $(i\geqslant 0)$. Формула $x'(x, y)=(x'x, y)$ определяет Γ как комплекс операторов комплекса $W_f(\Gamma)$. Без труда проверяется, что тройка $(\Gamma, Y, W_f(\Gamma))$ является скрещенным прямым произведением (реф. 6240).

Комплекс Λ полугрупп с гомотопией называется комплексом типа (Π, n), если $\pi_q(\Lambda)=0$ при $q\neq n$, $\pi_n(\Lambda)=\Pi$, $\Lambda_q=0$ при $q<n$. Автор называет системой Постникова последовательность $\mathfrak{X}=(X^0, f^0, \Lambda(\Pi_1, 1), X^1, f^1, \ldots, \Lambda(\pi_n, n), X^n, f^n, \ldots)$, где π_0, π_1 — некоторые группы (абелевы, за возможным исключением группы π_0), $X^0=\overline{W}(\Lambda(\pi_0, 0))$, $\Lambda(\pi_n, n)$ — комплекс групп типа (Π_n, n), f^j — симплициальное отображение $X^j\to\overline{W}(\Lambda(\pi_{j+1}, j+1))$ и $X^{j+1}=W_{f^j}(\Lambda(\Pi_{j+1}, j+1))$ $(j\geqslant 0)$.

Система Постникова называется минимальной, если $\Lambda(\pi_n, n)=\Gamma(\pi_n, n)$ (реф. 6240). Оказывается, что любая система в некотором (точно определенном) смысле эквивалентна минимальной.

Пусть Λ — произвольный комплекс групп. Обозначим через ${}^n\Lambda$ его подкомплекс, состоящий из симплексов, все грани которых в размерностях $<n$ тривиальны. Предположим, что $\Pi_0(\Lambda)=0$. Тогда $\Lambda={}^1\Lambda$. Положим $\pi_n=\pi_n(\Lambda)$, $\Lambda(\pi_n, n)={}^n\Lambda/{}^{n+1}\Lambda$, $X^n=\Lambda/{}^{n+1}\Lambda$. Тройка $(\Lambda(\pi_{n+1}, n+1), X^n, X^{n+1})$ естественным образом определяется как скрещенное произведение. Этому скрещенному произведению соответствует естественное отображение $f^n:X^n\to\overline{W}(\Lambda(\pi_{n+1}, n+1)$. Оказывается, что последовательность

$$\mathfrak{X}(\Lambda)=(0, 0, \Lambda(\pi_1 1), X^1f^1, \Lambda(\pi_2, 2), \ldots)$$

является системой Постникова. Эта система минимальна тогда и только тогда, когда минимален комплекс Λ. М. М. Постников

6243. Теорема Фрейденталя, точная последовательность Джеймса и обобщенный инвариант Хопфа. Мур (Le théorème de Freudenthal, la suite exacte de James et l'invariant de Hopf généralisé. Moore J. C.), Sémin. H. Cartan, Ecole norm. supér., 1954/1955, 7, № 22, 1—15 (франц.)

Пусть X — произвольное (линейно связное) пространство и x_0 — некоторая его точка. Надстройкой $s(X)$ над пространством X автор называет, как это принято в последнее время, фактор-пространство пространства $X\times I$, где $I=[0, 1]$, определенное с помощью отождествлений: $(x, 0)=(x', 1)=(x_0, t)$ для любых $x, x'\in X$, $t\in I$. Естественное отображение $\lambda\times I\to s(X)$ обозначается через η. Предположим, что на пространстве X существует непрерывная действительная неотрицательная функция λ, равная нулю только в точке x_0 (предположение существования такой функции не является серьезным ограничением, так как для любого X существует пространство X', обладающее этим свойством и имеющее тот же гомотопический тип, что и пространство X). Любой точке $x\in X$ отнесем

отображение $i(x)$ отрезка $[0, \lambda(x)]$ в пространство $s(X)$, положив $i(x)(t) = \tau_t(x, t/\lambda(x))$. Это отображение можно рассматривать как замкнутый путь (петлю) пространства $s(X)$ в точке $\tau_t(x_0, 0)$. Тем самым определяется отображение $i: X \to \Omega(s(X))$ пространства X в пространство петель $\Omega(s(X))$ надстройки $s(X)$ (за $i(x_0)$ принимается единичный путь). Гомоморфизм $E: \pi_q(X) \to \pi_q(\Omega(s(X)))$, индуцированный отображением i, называется гомоморфизмом надстройки. В силу естественного изоморфизма $\pi_q(\Omega(s(X))) = \pi_{q+1}(s(X))$ его можно рассматривать как гомоморфизм $\pi_q(X) \to \pi_{q+1}(s(X))$. В случае $X = S^n$ гомоморфизм E совпадает с гомоморфизмом надстройки в смысле Фрейденталя.

Очевидно, что $X \approx i(X)$, так что X можно рассматривать как подпространство пространства $\Omega(s(X))$. Соответствующий гомоморфизм $H: \pi_q(\Omega(s(X))) \to \pi_q(\Omega(s(X)), X)$ называется обобщенным инвариантом Хопфа. В случае $X = S^n$, $q = 2n$ он по существу совпадает с классическим инвариантом Хопфа.

Доказывается, что если $\pi_q(X) = 0$ при $q < n$, то $\pi_q(\Omega(s(X)), X) = 0$ при $q < 2n$ и $\pi_{2n}(\Omega(s(X)), X) \approx \approx \pi_n(X) \otimes \pi_n(X)$. Следовательно («теорема Фрейденталя»), для $q < 2n-1$ отображение E является изоморфизмом, а для $q = 2n-1$ имеет место точная последовательность

$$\pi_n(X) \otimes \pi_n(X) \xrightarrow{W} \pi_{2n-1}(X) \xrightarrow{E} \pi_{2n-1}(\Omega(s(X))) \to 0.$$

Встречающееся в этой последовательности отображение W определяется умножением Уайтхеда.

Далее доказывается следующая теорема Самельсона—Ботта: Пусть X — односвязное пространство и пусть Λ — такое коммутативное кольцо с единицей, что для всех $q \geqslant 0$ группа $H_{q+1}(X; \Lambda)$ является свободным Λ-модулем. Тогда, если для всех $q \geqslant 0$ отображение надстройки $s: H_q(\Omega(X); \Lambda) \to H_{q+1}(X; \Lambda)$ (соответствующее расслоенному пространству $E(X)$ путей пространства X) является эпиморфизмом, то алгебра Понтрягина $H_*(\Omega(X); \Lambda)$ естественно изоморфна тензорной алгебре $T(A)$, где A — градуированный модуль, однородные составляющие которого определяются формулой $A_q = H_{q+1}(X; \Lambda)$ $(q \geqslant 0)$. Применяя эту теорему к пространству $s(X)$, немедленно получаем, что алгебра $H_*(\Omega(s(X)); \Lambda)$ естественно изоморфна алгебре $T(H_*(X; \Lambda))$. Наконец, доказывается, что для любого линейно связного пространства X

$$H_n(\Omega(s(X))) \approx \sum_{r+s=n;\ r>0} H_r(X) \otimes H_s(\Omega(s(X))) + \\ + \sum_{r+s=k-1} \operatorname{Tor}(H_r(X), H_s(\Omega(s(X)))).$$

Пусть G — произвольная абелева группа. Как известно, для любого $n > 0$ существует такое (с точностью до гомотопического типа однозначно определенное) клеточное разбиение $Y(G, n)$, что $\pi_q(Y(G, n)) = 0$ при $q < n$, $\pi_n(Y(G, n)) \approx G$ и $H_q(Y(G, n)) = 0$ при $q > n$. Оказывается, что для любого пространства X естественное отображение λ множества $\pi_n(X, G)$ классов отображений $Y(G, n) \to X$ (при $n > 1$ это множество является группой, а при $n > 2$ — абелевой группой) в группу $\operatorname{Hom}(G, \pi_n(X))$ является эпиморфизмом. Аналогично, для любой пары (X, A) естественное отображение λ множества $\pi_{n+1}(X; A; G)$ классов отображений $(Y^*(G, n), Y(G, n)) \to (X, A)$, где $Y^*(G, n)$ — стягиваемое по себе в точку клеточное разбиение, содержащее разбиение $Y(G, n)$, в группу $\operatorname{Hom}(G, \pi_{n+1}(X, A))$ является отображением на.

Пусть $f: X \to Y$. Система $\{X^n, f^n\}$ пространств X^n и отображений $f^n: X^n \to Y$ называется разложением отображения f, если выполнены следующие условия: $X^1 = X$, $f = f^1$, $X^n \subset X^{n+1}$, $f^{n+1} | X^{n+1} = f^n$, пара (X^{n+1}, X^n) является относительным клеточным разбиением, для любого $q < n$ отображение f^n индуцирует изоморфизм $\pi_q(X^n) \approx \pi_q(Y)$, индуцированное отображением f^n отображение $\pi_n(X^n) \to \pi_n(Y)$ является эпиморфизмом и для любого $q > n$ вложение $X \subset X^n$ индуцирует изоморфизм $H_q(X) \approx H_q(X^n)$. Отображения f^n естественным образом определяют отображение f^∞ пространства $X^\infty = \bigcup X^n$ в пространство Y. Оказывается, что разложение (X^n, f^n) существует для любого отображения f, индуцирующего изоморфизм фундаментальных групп. В частности, разложение существует для естественного отображения $i: X \to \Omega(s(X))$. Соответствующее отображение $i^\infty: X^\infty \to \Omega(s(X))$ индуцирует изоморфизм $\pi_q(X^\infty, X) \approx \approx \pi_q(\Omega(s(X)), X)$.

Пусть X — линейно связное пространство с абелевой фундаментальной группой. Положим $Y = (sX) \cup U$, где $U = V_{n=1}^{\infty} Y(H_n(\Omega(s(X)), X), n+1))$. Оказывается, что существует отображение $f: Y \to s\Omega(sX)$, индуцирующее для любого q изоморфизм $\pi_q(Y) \approx \pi_q(s\Omega(sX))$. Отсюда выводится, что для любого r существует отображение $(X^\infty, X) \to (\Omega(Y(H_r(\Omega(sX), X), r+1)), e)$, где e — единичный путь, индуцирующее изоморфизм r-мерных групп гомологий. В частности, полагая $X = S^n$ и $r = 2n$, получаем, что существует отображение $f: (X^\infty, S^n) \to (\Omega(S^{2n+1}), e)$, индуцирующее изоморфизм $\pi_{2n}(X^\infty, S^n) \approx \pi_{2n}(\Omega(S^{2n+1}))$. Оказывается, («теорема Джеймса»), что для нечетного n отображение f индуцирует изоморфизм $\pi_q(X^\infty, S^n) \approx \pi_q(\Omega(S^{2n+1}))$ при любом q. Так как $\pi_q(X^\infty, S^n) \approx \pi_q(\Omega(s(S^n)), S^n)$ то, следовательно, $\pi_q(\Omega(S^{n+1}), S^n) \approx \pi_{q+1}(S^{2n+1})$ при нечетном n. Этот изоморфизм переводит граничный гомотопический оператор пары $(\Omega(S^{n+1}), S^n)$ в некоторый гомоморфизм $\partial^\# : \pi_{q+1}(S^{2n+1}) \to \pi_{q-1}(S^n)$. В результате гомотопическая последовательность пары $(\Omega(S^{n+1}), S^n)$ переходит в точную последовательность

$$\to \pi_q(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{q+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi'_{q+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{\partial^\#} \\ \to \pi_{q-1}(S^n) \to \dots$$

(так называемая «точная последовательность Джеймса»). Для четного n отображение f индуцирует C-изоморфизмы, где C — класс конечных групп нечетных порядков (РЖМат, 1954, 5086) и, следовательно, последовательность Джеймса является C-точной последовательностью.

В последнем пункте излагаются некоторые соображения, связанные с проблемой существования отображений $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ с инвариантом Хопфа, равным единице.

М. М. Постников

6244 К. Семинар А. Картана (Sémin. H. Cartan, Ecole norm. supér., 1954/1955, 7e). Paris 1956, 232 p.) (франц.)

Второе издание трудов семинара Картана за 1954/1955 гг. Исправлены вкравшиеся в первое издание (РЖМат, 1957, 5421—5430; 6232—6243) неточности и опечатки (РЖМат, 1957, 5432).

М. М. Постников

6245 Д. Исследования по общей и равномерной топологии методом покрытий. Смирнов Ю. М. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

— —

См. также: 6409, 6650, 6657

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

6246. К теории меры на абстрактном множестве. Кафьеро (Sulla teoria della misura in un insieme astratto. Cafiero Federico), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 269—283 (англ.)

Пусть S — абстрактное множество; $\mathscr{E}$ — семейство его подмножеств, замкнутое относительно операций конечного суммирования и дискретного умножения, к которому принадлежат все множество S и пустое множество. Обозначим через $\mathscr{A}$ семейство подмножеств S, образованное дополнениями относительно S всевозможных множеств, являющихся элементами семейства $\mathscr{E}$. Тогда семейство $\mathscr{A}$ будет замкнутым по отношению к операциям дискретного суммирования и конечного умножения. Семейство $\mathscr{E}$ обладает свойством (α), если для каждого $H \in \mathscr{E}$ существуют две такие последовательности множеств из $\mathscr{E}$, $\{H_k\}$ и $\{H'_k\}$, что $\lim_{k\to\infty} H_k = H$, причем $H_k \supset S - H'_k \supset H_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots$).

Семейство $\mathscr{A}$ обладает свойством (α'), если для каждого $A \in \mathscr{A}$ существуют две такие последовательности $\{A_k\}$ и $\{A'_k\}$ множеств из $\mathscr{A}$, что $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, причем $A_k \subset S - A'_k \subset A_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots$).

Функция множества $\varphi(H)$ называется аддитивной на $\mathscr{E}$, если она определена и конечна для любого $H \in \mathscr{E}$ и удовлетворяет следующим условиям: 1) $\varphi(0) = 0$; 2) $\varphi(H_1 + H_2) = \varphi(H_1) + \varphi(H_2) - \varphi(H_1 H_2)$ для любой пары множеств H_1 и H_2 из $\mathscr{E}$; 3) $\lim_{k\to\infty} \varphi(H_k) = \varphi(\lim_{k\to\infty} H_k)$ для каждой убывающей последовательности $\{H_k\}$ множеств из $\mathscr{E}$. Аналогично определяется функция множества, аддитивная на семействе $\mathscr{A}$, но в третьем условии предполагается, что соответствующая последовательность множеств из $\mathscr{A}$ — возрастающая.

В работе доказываются следующие теоремы:

1. Пусть дана функция $\varphi(H)$, аддитивная на семействе $\mathscr{E}$, обладающем свойством (α). Тогда существует одна и только одна функция $\varphi(I)$, вполне аддитивная на наименьшем вполне аддитивном семействе, содержащем $\mathscr{E}$, тождественно равная $\varphi(H)$ на $\mathscr{E}$.

2. Пусть дана функция множества $\varphi(A)$, аддитивная на семействе $\mathscr{A}$, обладающем свойством (α'). Тогда существует одна и только одна вполне аддитивная функция $\varphi(I)$, определенная на наименьшем вполне аддитивном семействе, содержащем $\mathscr{A}$, тождественно равная $\varphi(A)$ на семействе $\mathscr{A}$.

Полная аддитивность понимается в обычном смысле. Эти теоремы являются обобщением классических результатов Каччопполи и более ранних результатов автора.

Примечание референта. Под дискретной суммой автор, по-видимому, понимает сумму конечного числа или счетного множества множеств. Аналогично в отношении дискретного произведения. Это видно, в частности, из третьего условия аддитивности. Такая терминология не является общепринятой. Часто понимают под дискретной суммой или произведением сумму или произведение конечного числа множеств.

В. М. Дубровский

6247. О продолжении меры методом Бореля. Лебланк, Фокс (On the extension of measure by the method of Borel. LeBlanc L., Fox G. E.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 4, 516—523 (англ.)

Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо с мерой μ, а $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ — σ-кольцо, порожденное кольцом $\mathbf{R}$. Обозначим через $\mathbf{R}^+$ класс пределов неубывающих последовательностей множеств из $\mathbf{R}$, а через $\mathbf{R}^0$ — класс пределов последовательностей множеств из $\mathbf{R}$. Допустим, что $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}^0_{\alpha-1}$, если α — порядковое число первого рода, $\mathbf{R}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{R}_\beta$, если α — отличное от 0 предельное порядковое число. Известно, что для каждого α $\mathbf{R}_\alpha$ является кольцом и $\mathbf{S}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_{\omega_1}$.

Доказывается, что: 1) с помощью формулы $\mu^+(E) = \lim_m \mu(E_m)$, где $\{E_m\}$ — любая неубывающая последовательность множеств из $\mathbf{R}$ с пределом E, однозначно определяется функция множества на $\mathbf{R}^+$; 2) функция множества μ^0, определенная с помощью формулы $\mu^0(E) = \inf \mu(E')$, где $E \subset E' \in \mathbf{R}$, является мерой на $\mathbf{R}_0$.

Далее мера μ_α на $\mathbf{R}_\alpha$ называется нормальным продолжением меры μ, если $\mu_{\beta+1} = \mu^0_\beta$ для каждого порядкового числа $\beta < \alpha$. Доказывается теорема: если $\mathbf{R}$ — кольцо с мерой μ, то существует мера $\bar{\mu}$ на $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, являющаяся нормальным продолжением меры μ.

Ш. С. Пхакадзе

6248. О характеристическом свойстве σ-конечной меры. Люксембург (On a characteristic property of σ-finite measures. Luxemburg W. A. J.), Nieuw. arch. wiskunde, 1956, 4, № 3, 124—126 (англ.)

Пусть $\mathfrak{S}$ — σ-кольцо подмножеств абстрактного пространства S с мерой μ. Через u, v обозначаются неотрицательные измеримые функции. По определению, λ есть норма функции, если $\lambda(u)$ определена для всех u, $0 \leqslant \lambda(u) \leqslant \infty$ и

(L_1) $\lambda(u) = 0$, если $u(P) = 0$ почти для всех $P \in S$;
(L_2) $\lambda(u) \leqslant \lambda(v)$, если $u(P) \leqslant v(P)$ для всех $P \in S$;
(L_3) $\lambda(u+v) \leqslant \lambda(u) + \lambda(v)$;
(L_4) $\lambda(ku) = k\lambda(u)$ для всех $k \geqslant 0$.

Норма функции λ называется функцией расстояния (см. также РЖМат, 1954, 4489, где употребляется термин «функция длины»), если выполнено условие:

(L_5) Если $u_1(P) \leqslant u_2(P) \leqslant \ldots$ для всех $P \in S$, то $\lambda(\sup u_n) = \sup \lambda(u_n)$.

Норма функции λ называется рефлексивной, если $\lambda = \lambda''$, где операция «$'$» определяется с помощью соотношения $\lambda'(v) = \sup_u \int u(P)\, v(P)\, d\mu$, $\lambda(u) \leqslant 1$.

Доказывается: если все функции расстояния рефлексивны, то μ является σ-конечной мерой. Отмечается, что обратное предложение следует из результатов автора (Banach function spaces, Thesis Delft Techn. Univ. Assen, 1955).

Ш. С. Пхакадзе

6249. Теорема о бесконечных последовательностях конечноаддитивных вещественнозначных мер. Никодим (A theorem on infinite sequences of finitely additive real valued measures. Nikodym Otton M.), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1955, 24, № 2, 265—286 (англ.)

Обобщается известная теорема Хелли. Через (B_p) обозначается множество, элементами которого являются полуоткрытые слева p-мерные сегменты $(x'_1, \ldots, x'_p; x''_1, \ldots, x''_p)$, где $0 \leqslant x'_j < x''_j \leqslant 1$ ($j = 1, 2, \ldots, p$), и их конечные суммы.

Доказывается теорема: Если

1) $\{\mu_n(F)\}$ — последовательность конечноаддитивных вещественнозначных мер, определенных на (B_p),

2) $|\mu_n(F)| \leqslant K < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots;\ E \in (B_p))$, то существует такая возрастающая последовательность $k(n)$ индексов, что

$$\mu(F) = \lim \mu_{k(n)}(F)$$

существует при любом $F \in (B_p)$. Функция $\mu(F)$ также является вещественнозначной конечноаддитивной мерой, причем $|\mu(F)| \leqslant K$.

В работе доказаны и другие предложения этого типа. И. С. Кац

6250. О нигде не плотных множествах в E_m. Маржик (Poznámka o řídkých množinách v E_m. Mařík Jan), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 3, 337—341 (чешск.; рез. русск., англ.)

Рассматриваются множества в евклидовом m-мерном пространстве E_m. Для множества $B \subset E_m$ и точки $x = [x_1, \ldots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$ обозначим через B_x^i множество тех $t \in E_1$, для которых $[x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_{m-1}] \in B$, где $1 \leqslant i \leqslant m$. Через $N(i, B)$ обозначим множество тех $x \in E_{m-1}$, для которых множество B_x^i имеет несчетное число компонент. Пусть $\mathfrak{R}^m$ означает систему замкнутых множеств $B \subset E_m$, для которых замыкания множеств $N(1, B), \ldots, N(m, B)$ имеют меру нуль.

Доказываются теоремы:

1. Если $B \subset E_2$ измеримо и нигде не плотно, $N(1, B)$ первой категории, а $N(2, B)$ имеет меру нуль, то и B имеет меру нуль.

2. Если $B \subset \mathfrak{R}^m$ нигде не плотно, то оно имеет меру нуль. Р. С. Гутер

6251. Об одной задаче Н. Н. Лузина. Фалеевич Б. Я., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 165—173

Пусть C — окружность, а V — семейство вращений вокруг ее центра. Множество $A \subset C$ называется универсальным (для всех счетных множеств), если для любого счетного множества $A_0 \subset C$ найдется такой элемент $v \in V$, что $v(A) \supset A_0$.

Доказывается (эффективно) существование множества $A \subset C$, удовлетворяющего условиям: 1) A одновременно является множеством первой категории и меры нуль в смысле Лебега, 2) для любой последовательности $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов семейства V пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} v_i(A)$ не пусто.

Этот результат, в частном случае, дает отрицательный ответ для одной задачи Н. Н. Лузина (Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951, задача 23).

Далее изучаются некоторые свойства универсальных множеств. Например, доказывается, что для того чтобы множество $A \subset C$ было универсальным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало свойством 2).

Примечание референта. В определении класса K'_{ω} вместо $A_{\omega} \equiv 0$ должно быть $A_{\omega} \not\equiv 0$. Ш. С. Пхакадзе

6252. О емкости обобщенных канторовых множеств. Хельстрём (On the capacity of generalized Cantor sets. Hällström Gunnar af), Acta Acad. Abo., 1955, 20, N 5, 8 pp. (англ.)

Обобщенное канторово множество E на сегменте $[0, 1]$ определяется заданием последовательностей $\{k_n\}$, $\{p_n\}$, где $k_n \geqslant 2$ целые и $p_n > 1$. Пусть $N_n = k_1 k_2 \ldots k_n$, $P_n = p_1 p_2 \ldots p_n$, $d_n = (N_n P_n)^{-1}$. Обозначим через $E_n = \{e_{nm}\}$, $m = 1, 2, \ldots, N_n$ множество из сегментов e_{nm} длины d_n, получающееся следующим индуктивным способом. Мы удаляем из $e_{n-1,\,v}$ в целом $k_n - 1$ интервалов длины δ_n (δ_n легко выражается через k_v и p_v). Далее $E = \bigcap E_n$. Доказываются следующие теоремы: Если $\sum N_n^{-1} \log p_n = \infty$, то множество E имеет емкость нуль. Если предыдущий ряд и ряд $\sum N_{n-1}^{-1} \log k_n$ сходятся, то E имеет положительную емкость. G. Szegö

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 146.

6253. О последовательностях квазинепрерывных функций в абстрактных пространствах. Виола (Sulle successioni di funzioni quasi continue negli spazi astratti. Viola Tullio), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 381—391 (итал.)

Рассматриваются функции $f(P)$, где P изменяется в пространстве S, в то время как значения функции принадлежат пространству S''. Задается некоторое (аддитивное) семейство $\mathscr{T}$ подмножеств множества S. Для множеств $e \in \mathscr{T}$ определена вполне аддитивная функция $\mu(e)$ (мера), причем значения $\mu(e)$ принадлежат некоторому пространству S'. Относительно S' делается ряд простых предположений. В частности требуется, чтобы для любой пары элементов S' была определена их сумма, являющаяся элементом S'. †Любому элементу $\nu \in S'$ приведено в соответствие неотрицательное число $\|\nu\|$ — его норма, при этом $\|\nu\| = 0$ тогда и только тогда, когда ν есть нулевой элемент. Полная вариация $m(E)$ функции μ на множестве $E \in \mathscr{T}$ определяется равенством

$$m(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(e_i)\|,$$

где знак sup относится к всевозможным подразделениям $E = \bigcup_{i=1}^{n} e$ множества E на непересекающиеся множества $e_i \in \mathscr{T}$. Предполагается, что $m(E)$ конечна.

Пусть пространство S будет метрическим и сепарабельным. Множество $I \subset S$ называется лебеговым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти замкнутое множество $C_\varepsilon \subset I$ и открытое множество $A_\varepsilon \supset I$, для которых $m(A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$.

Пусть пространство S'' будет топологическим. Функция $f(P)$ называется квазинепрерывной (почти непрерывной) относительно меры $\mu(e)$ на лебеговом множестве $I \subset S$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно построить замкнутое множество $C_\varepsilon \subset I$, на котором функция $f(P)$ будет непрерывной, причем $m(I \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\{f_n(P)\}$ функций, квазинепрерывных на одном и том же лебеговом множестве $I \subset S$ $(f_n(P) \in S'')$.

В предположении, что S'' — метрическое полное пространство, имеют место следующие две теоремы:

1 (Обобщение теоремы Егорова—Северини). Если последовательность $\{f_n\}$ сходится почти везде на множестве I, то для любого $\varepsilon > 0$ можно построить лебегово множество $H_\varepsilon \subset I$, для которого $m(H_\varepsilon) < \varepsilon$, причем последовательность $\{f_n\}$ будет сходиться равномерно на множестве $I \setminus H_\varepsilon$.

2. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится почти везде на I, то предельная функция $f(P)$ будет также квазинепрерывна на множестве I.

Доказательство этих теорем лишь намечено.

В предположении, что S'' — метрическое, сепарабельное и компактное пространство, справедлива теорема:

3. Можно построить функцию $f(P)$ квазинепрерывную на I, которая почти для каждой точки $P \in I$ будет равна одному из предельных значений последовательности $\{f_n(P)\}$.

Пусть S'' — метрическое, полное и сепарабельное пространство, каждая ограниченная часть которого компактна. Тогда имеет место теорема:

4. Часть G множества I, образованная всевозможными точками P, в каждой из которых последовательность $\{f_n\}$ имеет по крайней мере одно предельное значение, есть лебегово множество. Можно построить функцию $f(P)$, квазинепрерывную на G и равную

в любой точке $P \in G$ одному из предельных значений последовательности $\{f_n(P)\}$.

Эти результаты легко могут быть обобщены в направлении ослабления предположения о конечности меры $\mu(e)$. В. М. Дубровский

6254. **Об одном специальном пространстве Банаха.** Тандори (Über einen speziellen Banachschen Raum. Tandori Károly), Publs mat., 1954, 3, № 3—4, 263—268 (нем.)

Устанавливается, что общий вид линейного функционала в пространстве L_0^1 суммируемых на (0, 1) функций f, имеющих точку 0 точкой Лебега при значении $f(0) = 0$, есть

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$ — измеримая функция, для которой существует суммируемая на (0, 1) невозрастающая функция $\psi(t)$ такая, что $|\varphi(t)| \leqslant \psi(t)$ почти везде. Норма функционала Φ равна $\int_0^1 \psi(t)\,dt$, где $\psi(t)$ — наименьшая невозрастающая мажоранта (почти везде) для $|\varphi(t)|$. Д. К. Фаддеев

6255. **Обобщенная вариация Фреше и теоремы типа Рисса—Янга—Хаусдорфа.** Морс, Транзю (The generalized Fréchet variation and Riesz—Young—Hausdorff type theorems. Morse Marston, Transue William), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 1, 5—35 (англ.)

Используя ранее введенные понятия допустимого пространства A и связанного с ним пространства A_d, а также понятие функции $k(s, t)$, канонической относительно $E_A \times E_B$ (Morse M., Transue W., Ann. Math., 1949, 50, 777—815), авторы устанавливают в первой части реферируемой работы следующую теорему:

Если $k(s, t)$ — комплекснозначная функция, каноническая относительно $E_A \times E_B$, то следующие три условия на $k(s, t)$ эквивалентны:

а) для всякого x из A L-S-интеграл

$$g_x(t) = \int_{R_1} x(s)\,d_s k(s, t) \quad (t \in R_1)$$

существует и $g_x \in B_d$, причем $\|g_x\|_{B_d} \leqslant G\|x\|_A$;

б) для всякого $y \in B$ L-S-интеграл

$$\gamma_y(s) = \int_{R_1} y(t)\,d_t \overline{k(s, t)} \quad (s \in R_1)$$

существует и $\gamma_y \in A_d$, причем $\|\gamma_y\|_{A_d} \leqslant H\|y\|_B$;

в) вариация $h(A, B, k) < \infty$.

Как следствие из этой теоремы (при надлежащей конкретизации пространств A и B) может быть получена теорема Рисса—Янга—Хаусдорфа о рядах Фурье функций из L_p по ограниченной в совокупности ортонормальной системе.

Во второй части работы авторы изучают допустимые пространства A, для которых пространства A_d составлены из функций, являющихся неопределенными интегралами. Изучение таких пространств позволяет авторам получить обобщения теоремы Пейли и теоремы Харди—Литлвуда (по поводу последних теорем см. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, 202, 210).

В части III работы подробно изучается один конкретный класс допустимых пространств. Авторы получают ряд новых теорем из теории ортогональных рядов; но обилие новых понятий, введенных в работе, не позволяет сформулировать здесь эти результаты. Н. П. Купцов

6256. **К теории дифференцирования функций множества.** Пок (Contributions à la théorie de la dérivation de fonctions d'ensemble. Pauc Chr.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 3, Groningen—Amsterdam, 1956, 127—131 (франц.)

Пусть E — некоторое метрическое пространство и X — аддитивный класс множеств из пространства E, на котором определена мера μ. Теорема Радона—Никодима заключается в следующем: Пусть E — множество, представимое в виде суммы последовательности множеств конечной меры μ. Тогда каждая аддитивная функция $\Phi(X)$ μ-измеримых множеств X имеет вид:

$$\Phi(X) = \int_X f\,d\mu + \Phi(X \cdot N_0),$$

где $f(p)$ — интегрируемая функция точки на E и N_0 — множество μ-меры нуль.

Из этой теоремы исходит следующая проблема: зная функцию множества $\Phi(X)$, восстановить интегрируемую функцию f точки $p \in E$. Дается обзор результатов, касающихся вышепоставленной задачи. А. Г. Джваршейшвили

6257. **Об одном свойстве множеств $\{f'(x) > a\}$.** Липинский (Une propriété des ensembles $\{f'(x) > a\}$. Lipinski J. S.), Fundam. math., 1955, 42, № 2, 339—342 (франц.)

В статье решаются две проблемы, поставленные референтом (Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 69, 1—54). Референт определил шесть классов M_k, $0 \leqslant k \leqslant 5$, множеств действительных чисел типа F_σ, $M_{k+1} \subset M_k$, $k = 0, \ldots, 4$. В частности, множество A принадлежит классу M_2, если в каждой односторонней окрестности любой точки $x \in A$ лежит часть множества A положительной меры. Множество A принадлежит классу M_4, если существуют последовательность замкнутых множеств F_n и последовательность чисел $\tau_n > 0$ такие, что $A = \bigcup_1^\infty F_n$ и для каждого $x \in F_n$ и каждого числа $c > 0$ существует такое число $\varepsilon(x, c) > 0$, что для каждой пары чисел h, h_1 из условий

$$hh_1 > 0,\ h/h_1 < c,\ |h + h_1| < \varepsilon(x, c) \qquad (1)$$

следует, что

$$|h_1|^{-1}\,|(x + h,\ x + h + h_1) \cap A| > \tau_n$$

(через (a, b) обозначается открытый интервал с концами a и b, причем не обязательно $a < b$). Множество A принадлежит классу M_3, если в предыдущем определении можно взять $\tau_n \geqslant 0$. Положив $\tau_n = 0$ для каждого n, мы можем упростить определение класса M_3: множество A принадлежит классу M_3, если для каждого $x \in A$ и каждого $c > 0$ существует такое $\varepsilon(x, c) > 0$, что из условий (1) следует неравенство $|(x + h, x + h + h_1) \cap A| > 0$. В частности, из этого определения немедленно следует, что каждое множество типа F_σ, имеющее часть положительной меры в каждом интервале, принадлежит классу M_3.

Пустое множество принадлежит каждому классу M_k.

Референт доказал, что если производная $f'(x)$ всюду существует и ограничена сверху, то множество $\{f'(x) > a\}$ принадлежит классу M_4 (даже, если $f(x)$ разрывна, что возможно при $f'(x) = -\infty$), и обратно: для каждого множества A класса M_4 существует непрерывная функция $f(x)$, имеющая всюду ограниченную производную, $|f'(x)| < 1$, так, что $A = \{f'(x) > 0\}$. Следовательно, при предположении ограниченности (может быть, только сверху) необходимым и достаточным условием для множества $\{f'(x) > a\}$ является принадлежность классу M_4. При предположении конечности $f'(x)$ не-

обходимым условием для множества $\{f'(x) > a\}$ является принадлежность классу M_3, а при предположении существования всюду $f'(x)$, $|f'(x)| \leqslant \infty$ и непрерывности $f(x)$ необходимым условием для этого множества является принадлежность классу M_2.

Референт поставил вопрос о том, будут ли эти условия, т. е. $E \in M_3$ или $E \in M_2$, достаточны для существования такой непрерывной функции f, что $E = \{f'(x) > a\}$ (и соответственно $|f'(x)| < \infty$ или $|f'(x)| \leqslant \infty$).

Автор дает отрицательный ответ на вопрос в более общей форме, освобождаясь от условия непрерывности функции. Это следует из теоремы автора о некотором свойстве множеств $\{f'(x) > a\}$, являющемся новым необходимым условием, независимым от условия принадлежности множества классу M_3.

Для каждого множества E действительных чисел определяется множество A_E всех точек x, обладающих следующим свойством W_E: $x \in E$ и для любого числа $\eta > 0$ существует такое число $c > 0$, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутый интервал I со свойствами $|I| + \rho(x, I) < \varepsilon$, $|I|^{-1}\rho(x, I) < c$, $|I|^{-1}|EI| < \eta$ (ρ означает расстояние).

Следовательно, $A_E \subset E$. Легко доказать, что если в точке $x \in E$ нижняя плотность множества E равна нулю, то $x \in A_E$, и что если $E \in M_4$, то A_E пусто.

Теорема. Если $f(x)$ имеет всюду производную и $E = \{f'(x) > a\}$, то множество A_E нигде неплотно.

Следствие. При предыдущих предположениях множество всех точек $x \in E$, для которых нижняя плотность множества E равна нулю, нигде не плотно (так как это есть часть нигде не плотного множества A_E).

Строится простой пример, показывающий, что свойство, указанное в следствии (а также в теореме), независимо от свойства принадлежности классу M_3 (а следовательно, также и классу M_2). Z. Zahorski

6258. Обобщение одной теоремы Стона. Тиман А.Ф., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 5, 955—958

Рассматривается семейство ограниченных и непрерывных вещественных функций $f(x)$, определенных на регулярном топологическом пространстве G, обладающих тем свойством, что для любого действительного числа a (за исключением, быть может, одного) подпространство тех x, где $f(x) \geqslant a$, или тех x, где $f(x) \leqslant a$, бикомпактно.

Пусть D есть множество функций из этого семейства, являющееся алгебраическим кольцом относительно обычных операций сложения и умножения, в которое входят все константы. Кроме того, пусть для любых двух точек x_1, x_2 из G существует функция $f(x)$, принадлежащая множеству D, такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, причем ни одно из этих значений не равно точной нижней границе чисел a, для которых подпространство тех x, где $f(x) \geqslant a$, бикомпактно.

Доказывается, что при этих условиях произвольная функция из рассматриваемого семейства есть предел равномерно сходящейся последовательности функций, принадлежащих множеству D. Ф. И. Харшиладзе

6259. Теоремы Хелли о монотонных функциях. Бранк, Юинг, Уц (Some Helly theorems for monotone functions. Brunk H. D., Ewing G. M., Utz W. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 776—783 (англ.)

Пусть $F(x)$ определена на n-мерном интервале $S \subset E^n$ и $F_{\nu\eta p}(x_\nu, x_\eta)$ — значение $F(x)$ в точке

$$x = (p_1, \ldots, p_{\nu-1}, x_\nu, p_{\nu+1}, \ldots, p_{\eta-1}, x_\eta, p_{\eta+1}, \ldots, p_n);$$

$$p = (p_1, \ldots, p_{\nu-1}, p_{\nu+1}, \ldots, p_{\eta-1}, p_{\eta+1}, \ldots, p_n).$$

По определению, функция $F(x)$ называется монотонной на S, если 1) $F(x)$ монотонно не убывает по каждой переменной, 2) $F_{\nu\eta p}(\beta_1\beta_2) - F_{\nu\eta p}(\alpha_1, \beta_2) - F_{\nu\eta p}(\beta_1, \alpha_2) + F_{\nu\eta p}(\alpha_1, \alpha_2) \geqslant 0$ для всех ν, η, p как только $\beta_1 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \alpha_2$.

Устанавливаются теоремы:

1. Если F монотонна на S, то совокупность ее точек разрыва содержится в сумме не более чем счетного множества гиперплоскостей вида $x_i = a$.

2. Если $\{F_q\}$ — последовательность монотонных на S функций, $|F_q| \leqslant A$ при всех q, то существуют монотонная на S функция $F(x)$ и последовательность $\{F_{q_l}(x)\}$ такие, что $\lim_{l\to\infty} F_{q_l}(x) = F(x)$ в каждой точке $x \in S$.

Теоремы 1 и 2 частично распространяются на функции, принимающие значения $\pm\infty$. Изучается ряд свойств функций, монотонных по каждой переменной. Приводится пример, показывающий, что для функций, монотонных по каждой переменной, теорема 2 не верна. А. Я. Дубовицкий

6260. О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике L_p. Дзядык В. К., Матем. сб., 1956, 40, № 2, 239—242

Пусть в промежутке (a, b) задана функция f, удовлетворяющая условиям: $f \in L_p(a, b)$ и

$$\omega_p(\delta, f; a, b) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left(\int_{a+h}^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant M\delta^\alpha,$$

где M — постоянная, $p \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Доказывается, что тогда существует такая функция F, определенная и суммируемая на всей числовой оси, что $F = f$ на (a, b), $F \in L_p(-\infty, \infty)$ и $\omega_p(\delta, F; -\infty, \infty) \leqslant cM\delta^\alpha$.

Отмечается, что аналогичным образом можно получить следующее утверждение: если определенная на (a, b) функция $f \in L(a, b)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{0<h\leqslant\delta} \int_{a+h}^{b-h} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|\, dx \leqslant M\delta,$$

где M — постоянная, то существует такая функция F, определенная на всей числовой оси, что $F = f$ на (a, b), $F \in L(-\infty, \infty)$ и

$$\sup_{0<h\leqslant\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)|\, dx \leqslant cM\delta.$$

В обоих случаях c — не зависящая от M постоянная. Л. Д. Кудрявцев

6261. Об одном семействе функциональных пространств. Никольский С. М., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 203—212

Изложение доклада на Всесоюзной конференции по функциональному анализу. Рассматриваются свойства классов $H_p^{(r)}$ функций, определенных на некоторой области G или на некотором достаточно гладком m-мерном многообразии, расположенных в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $1 \leqslant m \leqslant n$. Указанные классы функций были введены и изучались автором в предшествующих работах (см., например, РЖМат, 1953, 148,- 149). Отмечается, что пространство $H_p^{(r)}$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|_{L_p(G)}^{(r)}$ (см. также реф. 6262), приводятся теоремы вложения для пространств $H_p^{(r)}$ в случае различных r и p (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 3., 244—278), указывается связь пространств $H_p^{(r)}$ с подпространствами $W_p^{(r)}$ С. Л. Соболева, исследуются с точки зрения функциональных пространств свойства оператора

вложения пространств $H_p^{(r)}$ в соответствующие пространства функций, определенных на многообразиях меньшего числа переменных, чем исходное, излагается свойство компактности в этих пространствах (см. также РЖМат, 1954, 5100; 1957, 4691), формулируется обратная теорема вложения (т. е. теорема о продолжении функции с m-мерного многообразия на все пространство R^n, $1 \leqslant m \leqslant n$). Дается приложение теории рассматриваемых пространств к решению вариационным методом задачи об отыскании минимума положительной формы $D_r[u] = D_r[u, u]$, где $D_r[u, v]$ — обладающая некоторыми естественными для данного вопроса свойствами билинейная форма в пространстве $W_2^{(r)}$ функций, определенных в области G с достаточно гладкой границей S. При этом считается, что на границе S заданы значения функции u и ее нормальные производные соответствующих порядков. Показывается, что сформулированные выше теоремы дают возможность указать в терминах свойств граничных функций достаточные условия применимости вариационного метода, которые «с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$» совпадают с необходимыми условиями, а также указать и критерий устойчивости решения задачи.

В заключение приводятся формулировки теорем, аналогичных вышеуказанным, для случая более общих классов функций $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$. Дается подробная библиография вопроса (21 назв.) и проводится краткий анализ работ других авторов в рассматриваемом направлении.

Л. Д. Кудрявцев

6262. О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств. Никольский С. М., Матем. сб., 1956, **40**, № 2, 243—268

Изучается вопрос о продолжении функций, заданных в некоторой ограниченной области G n-мерного евклидова пространства R^n, на некоторую область G^*, объемлющую данную область: $G \subset \bar{G} \subset G^*$. Пусть функция f определена в G. Функция f называется функцией класса (С. Л. Соболева) $W_p^{(\rho)}(G, K)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если она интегрируема в p-й степени вместе со всеми своими частными производными до порядка ρ включительно, причем норма любой ее частной производной порядка ρ в пространстве $L_p(G)$ не превосходит числа $K \geqslant 0$. Функция f называется функцией класса $W_p^{(0)} H^{(\alpha)}(G, M)$, $0 < \alpha < 1$, если

$$\| f(\bar{Q} + \bar{h}) - f(\bar{Q}) \|_{L_p(G')} \leqslant M |h|^\alpha$$

для всех областей $G' \subset G$ и всех допустимых векторов $\bar{h}$, сдвигающих G' в пределах G, где $|\bar{h}|$ — длина вектора $\bar{h}$. Функция f называется функцией класса $W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G, M)$, если $f \in W_p^{(\rho)}(G, K)$ при некотором $K > 0$ и если любая частная производная от f порядка ρ принадлежит классу $W_p^{(0)} H^{(\alpha)}(G, M)$. Предполагается, что область G ограничена $\rho + 2$ раза непрерывно дифференцируемой поверхностью.

Доказывается теорема: Если $f \in W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G, M)$, то существуют область $G^* \supset \bar{G}$ и функция f^*, определенная на G^* и являющаяся продолжением f с G на G^* ($f = f^*$ на G) такая, что $f^* \in W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G^*, M^*)$, причем

$$\left\| \frac{\partial^l f^*}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \right\|_{L_p(G^*)} + M^* \leqslant c \left(\| f \|_{L_p(G)} + M \right)$$

для любых $l = \sum_{k=1}^n l_k \leqslant \rho$, где c — постоянная, не зависящая от $\| f \|_{L_p(G)}$ и M (но, вообще говоря, зависящая от G, p, ρ, α).

Отмечается, что отдельные частные случаи этой теоремы были получены ранее; при $n = 1$ и $\rho = 0$ В. К. Дзядыком (реф. 6260) и при $\rho = 0$, $p = \infty$ Киршбрауном (Kirszbraun M. D., Fundam. math., 1934, **22**, 77—108), Банахом (Banach S., Wstep do teorii funkcji rzeczywitych, Warszawa—Wroclaw, 1951), Ципсером и Гехером (РЖМат, 1956, 1217). Указывается, что теорема остается верной, если в ней класс $W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}$ заменить классом $W_p^{(\rho)}$ и считать $l \leqslant \rho - 1$, и что подобное предложение было доказано ранее в работах автора, а также Б. М. Бабича (РЖМат, 1953, 645), и для случая $p = \infty$, Хестинсом и Уитни (Hestenes M. R., Duke Math. J., 1941, **8**, 183—192; Whitney H., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **36**, 63—89; 1946, **40**, 309—317).

В случае, когда область G является прямоугольным параллелепипедом, доказывается более сильная теорема о продолжении функций класса $H_p^{(r_1, r_2, \ldots, r_n)}$, определенного в предыдущей работе автора (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 244—278).

Далее через $W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G)$ обозначается линейное нормированное пространство всех функций f, принадлежащих классам $W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G, M)$ при некоторых M, с нормой

$$\| f \|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha)} = \| f \|_{L_p(G)} + M_f,$$

где M_f — наименьшая константа M, с которой f входит в $W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G, M)$. Показывается, что на основании ранее полученных результатов автора из доказанных теорем следует возможность продолжения функции $f \in W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G)$ в такую функцию f^*, определенную на всем пространстве R^n, что

$$f^* \in W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(R^n), \quad \| f^* \|_{L_p(R^n)}^{(\rho+\alpha)} < c \| f \|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha)},$$

где постоянная c не зависит от $\| f \|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha)}$, причем оператор $Af = f^*$ линейный и ограниченный. Наконец, доказывается, что пространство $W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G)$ полно.

Л. Д. Кудрявцев

6263. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. I. Никольский С. М., Матем. сб., 1956, **40**, № 3, 303—318

Пусть G — плоская открытая область и Γ — кусочно-гладкий контур, гладкие куски которого имеют вторую непрерывную производную и образуют углы α, удовлетворяющие неравенству $0 < \alpha < 2\pi$. Доказывается, что если $0 < r - 1/p < 1$ и функция $f(x, y) \in H_p^{(r)}(G, M)$ (определение класса $H_p^{(r)}(G, M)$ см. РЖМат, 1954, 4381), то в смысле среднего значения существует $\varphi(s) = f|_\Gamma$ (s — переменная длина дуги контура Γ) — периодическая функция с периодом, равным длине Γ, такая, что $\varphi \in H_{*p}^{(r-1/p)}(\bar{M})$ (определение класса $H_{*p}^{(r-1/p)}(\bar{M})$ см. в работе автора: Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 244—278) и $\bar{M} < c \| f \|_{L_p(G)}^{(r)}$, где c не зависит от $\| f \|_{L_p(G)}^{(r)}$ (определение нормы $\| f \|_{L_p(G)}^{(r)}$ и $\| \varphi \|_{*L_p(\rho)}^{(\rho)}$ см. РЖМат, 1957, 4691). Отмечается, что этот результат есть развитие соответствующих результатов С. Л. Соболева, В. И. Кондрашова и автора. Обратно, если $0 < r - 1/p < 1$, $r \neq 2/p$ и на контуре Γ

задана функция $\varphi \in H_p^{*(r-1/p)}(M)$, то существует такая функция $f \in H_p^{(r)}(G, \overline{M})$, что $\varphi(s) = f|_\Gamma$,

$$\|f\|_{L_p(G)}^{(r)} < c\,\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}^{*(r-1/p)}$$

и $\overline{M} < cM$, где c не зависит ни от $\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}^{*(r-1/p)}$, ни от M.

Отмечается, что в случае гладкого контура сформулированные теоремы являются частным случаем других результатов автора (РЖМат, 1953, 149). Указывается аналог доказанных теорем в случае классов $W_p^{(r)}H^{(\alpha)}(G_1, M)$ (реф. 6262) для области G_1, ограниченной контуром Г. Наконец, дается приложение полученных результатов к решению вариационным методом задачи Дирихле: пусть функция $\varphi(s) \in H_2^{*(1/2+\varepsilon)}(M)$, где $\varepsilon > 0$, тогда соответствующая ей гармоническая функция $u(x, y)$, решающая задачу Дирихле для области G_1 с границей Г (при сделанных предположениях эта гармоническая функция существует и может быть получена вариационным методом), обладает следующим свойством:

$$D[u] = \iint_{G_1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy < cM^2 < \infty.$$

Для гладкого контура этот результат был получен автором ранее (РЖМат, 1953, 266). Л. Д. Кудрявцев

6264. Граничные свойства функций на областях с углами. Никольский С. М., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 1, 26—28

Рассматривается двумерная ограниченная область G, граница Г которой состоит из конечного числа гладких кусков, каждый из которых непрерывно дифференцируем $\bar{r}+2$ раза ($\bar{r}$ — неотрицательное целое); при этом предполагается, что два соседних куска образуют между собой углы ω такие, что $0 < \omega < 2\pi$. Пусть s — переменная длина дуги на контуре Г и значения s_k, $k = 1, 2, \ldots$, соответствуют угловым точкам A_k контура Г. По определению, система функций $\varphi_\lambda(s)$, определенная на Г, $\lambda = 0, 1, \ldots$, обладает свойством $\mathfrak{M}_{A_k}^{(\rho)}$, если числа $\varphi_\lambda(s_k + 0)$ и $\varphi_\lambda(s_k - 0)$ удовлетворяют таким соотношениям, как если бы существовала на плоскости соответствующее число раз непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$ такая, что

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial n^\lambda}\right|_\Gamma = \varphi_\lambda(s),\ \lambda < \rho.$$

Формулируются теоремы: Если $f \in H_p^{(r)}$, $r = \bar{r} + \alpha$, $\bar{r}$ — неотрицательное целое, $0 < \alpha \leqslant 1$ (РЖМат, 1953, 148, 149), то функции

$$\varphi_\lambda(s) = \partial^\lambda f/\partial n^\lambda|_\Gamma$$

для всех λ таких, что $r - \lambda - 1/p > 0$, принадлежат к классам $H_p^{(r-\lambda-1/p)}(\Gamma_k)$ для всех гладких кусков Γ_k контура Г и имеют место неравенства

$$\|\varphi_\lambda\|_{L_p(\Gamma_k)}^{(r-\lambda-1/p)} \leqslant c\,\|f\|_{L_p}^{(r)}$$

(определение соответствующих норм см. реф. 6262).

Кроме того, функции φ_λ обладают свойством $\mathfrak{M}_{A_k}^{(r-2/p)}$ для всех угловых точек A_k контура Г. Обратно, если $r > 0$ и на Г для любого целого $\lambda \geqslant 0$ такого, что $r - \lambda - 1/p = r_\lambda = \bar{r}_\lambda + \alpha_\lambda > 0$ ($\bar{r}_\lambda$ — неотрицательное целое, $0 < \alpha_\lambda \leqslant 1$, $\alpha_\lambda \neq 1/p$), заданы функции $\varphi_\lambda(s)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi_\lambda \in H_p^{(r_\lambda)}(\Gamma_k)$ для нецелого r_λ и $\varphi_\lambda \in W_p^{(r_\lambda)}(\Gamma_k)$ для целого r_λ на любом гладком куске Γ_k контура Г;

2) функции φ_λ в угловых точках A_k контура Г удовлетворяют соотношениям $\mathfrak{M}_{A_k}^{(r-2/p)}$ для $r - 1/p$ нецелого и соотношениям $\mathfrak{M}_{A_k}^{(r-1/p)}$ для $r - 1/p$ целого,

то на плоскости существует такая функция $f \in H_p^{(r)}$, что

$$\|f\|_{L_p}^{(r)} \leqslant c \sum_{\lambda, \Gamma_k} \|\varphi_\lambda\|_{L_p(\Gamma_k)}^{(r_\lambda)},$$

где сумма распространяется на все допустимые λ и все гладкие куски Γ_k.

Дается приложение сформулированного результата к решению основной граничной задачи для уравнения $\Delta^l u = f(x, y)$: если граничные функции φ_λ ($\lambda = 0, 1 \ldots, l-1$) принадлежат соответственно классам $H_2^{(l-\lambda-1/2+\varepsilon)}(\Gamma_k)$ ($0 < \varepsilon < 1/2$) для каждого гладкого куска $\Gamma_k \subset \Gamma$, удовлетворяют соотношениям $\mathfrak{M}_{A_k}^{(l)}$ и $f \in L_2(G)$, то в G существует единственная функция u такая, что $\Delta^l u = f(x, y)$ в G,

$$\partial^\lambda u/\partial n^\lambda|_\Gamma = \varphi_\lambda\ (\lambda = 0, 1, \ldots, l-1)$$

и

$$\int_G \sum_{m+k=l} \frac{l!}{m!\,k!} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x^m \partial y^k}\right)^2 dG < \infty.$$

Указывается класс n-мерных областей, на который естественным образом обобщаются полученные результаты. Л. Д. Кудрявцев

6265. Внутреннее неравенство для лебеговой площади. Силверман (An intrinsic inequality for Lebesgue area. Silverman E.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 2, 363—372 (англ.)

Рассматривается непрерывное отображение квадрата $Q = \{0 \leqslant u, v \leqslant 1\}$ плоскости в пространство m ограниченных последовательностей. Доказывается неравенство, аналогичное тому факту, что площадь четырехугольника не превосходит произведения расстояний между двумя парами противоположных сторон. С помощью этого неравенства устанавливается эквивалентность нескольких различных определений площади поверхности. Р. С. Гутер

6266. Современные понятия площади и объема. Занен (Moderne opvattingen van oppervlakte en inhoud. Zaanen A. C.), Euclides (Nederl.), 1957, 32, № 6, 199—204 (гол.)

Популярная лекция о мере и интеграле.

6267 К. Площадь поверхности. Чезари (Surface area. Cesari Lamberto. Ann. Math. Studies, 1956, № 35, 595 pp.) (англ.)

В книге изложена теория площади поверхностей, заданных в параметрической форме. Поверхность определяется как произвольное непрерывное отображение в трехмерное евклидово пространство некоторых множеств плоскости, названных допустимыми. Класс допустимых множеств включает в себя: а) конечные суммы замкнутых жордановых областей конечного порядка связности без общих точек, б) произвольные открытые множества плоскости и в) произвольные множества, открытые в множестве вида а). В качестве основного понятия площади поверхности принято понятие площади, соответствующее определению Лебега.

Содержание книги группируется вокруг трех основных теорем и проблемы тождества площадей в смысле Лебега, Пеано, Гёце-Банаха.

Непрерывное отображение допустимого множества A, определяющее поверхность S, задано в виде трех непрерывных функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$

определенных на A. С поверхностью S связаны три непрерывные отображения допустимого множества A на координатные плоскости: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=0$; $x=x(u,v)$, $y=0$, $z=z(u,v)$; $x=0$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$. Для этих плоских отображений введены понятие ограниченной вариации на A, понятие абсолютной непрерывности на A и понятие обобщенных якобианов I_i, $i=1, 2, 3$. Основные теоремы:

1. Для того чтобы произвольная непрерывная поверхность имела конечную лебегову площадь, необходимо и достаточно, чтобы три плоские отображения, связанные с поверхностью, имели ограниченную вариацию на множестве A.

2. Для каждой непрерывной поверхности S конечной лебеговой площади $L(S)$ плоские отображения, связанные с этой поверхностью, будут ограниченной вариации на A и имеют почти всюду на A обобщенные якобианы $I_i(u,v)$, $i=1, 2, 3$, являющиеся интегрируемыми по Лебегу функциями на A. При этом

$$L(S)\geqslant\iint_A\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}\,dudv;$$

равенство имеет место тогда и только тогда, когда все три плоские отображения абсолютно непрерывны на A.

3. Для каждой непрерывной поверхности S конечной лебеговой площади существует, по меньшей мере, одно представление, т. е. непрерывное отображение, эквивалентное в смысле Фреше определяющему отображению, которое обладает тем свойством, что функции x, y, z имеют обычные частные производные первого порядка почти всюду на A, обыкновенные якобианы $J_i(u,v)$, $i=1, 2, 3$, интегрируемы по Лебегу на A и площадь $L(S)$ в смысле Лебега поверхности S выражается в виде классического интеграла

$$L(S)=\iint_A\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}\,dudv.$$

При этом представление является конформным в некотором более общем смысле.

В книге, кроме понятия площади поверхности S по Лебегу, изучены и другие понятия площади. В частности рассмотрены понятие площади $P(S)$, соответствующее определению Пеано, и понятие площади $V(S)$, соответствующее идеям Гёце и Банаха. Показано, что для каждой непрерывной поверхности S выполняются равенства $L(S)=P(S)=V(S)$.

Приведены многие примеры, показывающие целесообразность введения тех или иных определений. Многие результаты и доказательства опубликованы впервые. Так, например, впервые теория площади поверхностей изложена в естественном порядке следования основных теорем. В связи с этим доказательства теорем 1 и 2 выполнены без использования теории эквивалентности Фреше и теории представления поверхностей. Это же замечание относится и к теоремам, устанавливающим равенства $L=P=V$. В книге показано, что известные соответствующие результаты для поверхностей вида $z=f(x,y)$ получаются как частные случаи.

В книге имеется небольшое предисловие, 10 глав, разбитых на параграфы с общей нумерацией, два дополнения, обширный список литературы, доведенный до 1954 г. включительно, и краткий список обозначений. Начиная со второй главы, в конце каждого параграфа приводятся библиографические ссылки и указания на результаты, не нашедшие места в книге.

Гл. 1 («Вводные соображения») содержит перечень основных результатов и понятий, относящихся к теории длины кривой и к теории площади поверхности вида $z=f(x,y)$. Указана цель книги и способ ее построения. Приведены вспомогательные неравенства. Заканчивается глава небольшим историческим очерком вместе с рассмотрением известного примера Шварца.

В гл. 2 («Лебегова площадь») дано определение допустимых множеств и непрерывных поверхностей в параметрической форме. Определена площадь непрерывной поверхности по Лебегу и изучены ее простейшие свойства. Рассмотрен вопрос об аксиоматическом определении площади и подвергнуты обсуждению идеи различных иных определений площади поверхностей, именно идеи, обязанные Пеано, Гёце, Банаху, Минковскому. Рассмотрена возможность применения теории меры Хаусдорфа к определению площади. Изучен принцип Колмогорова.

В гл. 3 («Площади в смысле Гёце U и V и площадь в смысле Пеано P») изучены свойства топологического индекса, или порядка, точки на плоскости относительно замкнутого пути. С помощью этого понятия даны видоизмененные определения площади, соответствующие идеям Гёце—Банаха и Пеано. Изучены простейшие свойства этих площадей. Начато изучение необходимых для дальнейшего топологических и теоретико-множественных свойств произвольных непрерывных отображений допустимых множеств.

В гл. 4 («С ограниченной вариацией и абсолютно непрерывные плоские отображения») изучен частный класс непрерывных отображений, именно, класс произвольных непрерывных отображений допустимых множеств на плоскость. Дано определение понятий полной, положительной и отрицательной вариаций плоского отображения, понятия функции кратности, понятия абсолютной непрерывности плоского отображения. Изучены свойства непрерывных плоских отображений с ограниченной вариацией. Изучены также свойства абсолютно непрерывных плоских отображений. Показано, что в применении к поверхности вида $z=f(x,y)$ понятия вариации и абсолютной непрерывности совпадают с хорошо известными понятиями вариации и абсолютной непрерывности в смысле Тонелли для функции двух переменных. В этой главе продолжено изучение топологических и теоретико-множественных свойств непрерывных отображений.

5 гл. («Первая теорема») начинается с изучения аналитических свойств произвольных непрерывных отображений, для которых плоские отображения имеют ограниченную вариацию. Затем изучены гомотопические свойства непрерывных кривых в трехмерном пространстве. Доказана первая основная теорема и рассмотрены многочисленные ее следствия.

6 гл. («Неравенство Кавальери») начинается с изложения теории Каратеодори простых концов границы произвольного плоского открытого множества. Затем изучено понятие, аналогичное понятию линий уровня на поверхности. Доказано неравенство Кавальери, устанавливающее связь между площадью в смысле Лебега непрерывной поверхности в интегралом от обобщенных длин «линий уровня» этой поверхности.

В гл. 7 («Отождествление площадей в смысле Лебега, Гёце и Пеано») продолжено изучение свойств площадей в смысле Лебега, Гёце и Пеано и доказано равенство $L(S)=V(S)=P(S)$ для произвольной непрерывной поверхности S. С этой целью подвергнуты более глубокому исследованию аналитические свойства непрерывных отображений.

В гл. 8 («Геометрические свойства и вторая теорема») изучены понятия произвольных функций интервала и функций множества. Изучены свойства асимптотических дифференциалов функций двух переменных. Определены обобщенные якобианы для произвольных непрерывных плоских отображений с ограниченной вариацией и изучены их свойства. Показано, что в том случае, когда функции, определяющие отображение, обладают обычными частными производными первого

порядка, обобщенный якобиан такого отображения совпадает с его обыкновенным якобианом. Здесь выведены формулы преобразования двойных интегралов при замене переменных и формулы преобразования площади при замене переменных для абсолютно непрерывного плоского отображения. В конце главы доказана вторая основная теорема.

В гл. 9 («Проблема представления поверхностей») изучено понятие эквивалентности в смысле Фреше непрерывных отображений. Дано определение поверхности Фреше. Здесь же изучены свойства средних интегральных значений для интегрируемых в смысле Лебега функций. Изучены свойства замкнутых и незамкнутых невырожденных поверхностей. Рассмотрено понятие почти конформного отображения и доказана теорема, согласно которой каждая незамкнутая невырожденная поверхность имеет, по меньшей мере, одно почти конформное представление на единичном квадрате. Из этого результата в качестве частного случая следует возможность почти конформного представления поверхностей вида $z=f(x, y)$, заданных на произвольном прямоугольнике.

В последней главе («Представление общих поверхностей и третья теорема») изучено понятие обобщенного конформного отображения. Рассмотрены топологические свойства произвольных непрерывных поверхностей и доказана третья основная теорема.

В первом дополнении («Прямое доказательство свойства непрерывных поверхностей») дано прямое доказательство теоремы, выясняющей гомотопические свойства непрерывных отображений. Доказательство в тексте опиралось на топологическую теорему, не доказанную в книге.

Во втором дополнении («Интеграл Вейерштрасса, взятый по поверхности») изучены свойства интеграла Вейерштрасса, определенного по любой непрерывной поверхности конечной площади в смысле Лебега. Доказана теорема существования этого интеграла. Доказаны теоремы Гаусса—Грина, Стокса и рассмотрены применения к вариационному исчислению.

В книге имеются опечатки. Нами обнаружено их более четырехсот. И. Я. Верченко

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

6268. Интегрируемость тригонометрических рядов. Суноути (Integrability of trigonometric series. Sunouchi Gen-ichiro), J. Math. Tokyo, 1953, **1**, 99—103 (англ.)

Доказываются четыре теоремы о связи между интегрируемостью функции $x^{\gamma-1}f(x)$ и сходимостью ряда $\sum |a_n| n^{-\gamma}$, где $f(x)=\sum a_n \cos nx$ или $f(x)=\sum a_n \sin nx$ и $f(x)$ или $\{a_n\}$ предполагается монотонной. Каждая теорема (с другими доказательствами) содержится в совокупности следующих статей: Edmonds S. M., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, **46**, 249—267; Sz.-Nagy B., Acta Univ. szeged. Sec. sci. math., 1949, **13**, 118—135; Boas R. P., Quart. J. Math., 1952, **3**, 217—221. R. P. Boas, Jr

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 240.

6269. Об абсолютной сходимости рядов Фурье. Сян Фу-чжэн (On absolute convergence of Fourier series. Hsiang Fu Cheng), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 12, 917—920 (англ.)

Приводятся утверждения: 1) Если $\varphi(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

то,

$$t^{-1}\int_0^t \varphi(u)\,du \to \sum a_n \text{ при } t \to +0. \qquad (1)$$

2) Если $\psi(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$,

то

$$t^{-1}\int_0^t \psi(u)\,du \to \sum b_n \text{ при } t \to +0. \qquad (2)$$

Примечание референта. 1) В правой части (1) должно быть $a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Кроме того, соотношение (1) сразу получается из разложения для $t^{-1}\int_0^t \varphi(u)\,du$ почленным переходом к пределу (что законно в силу условия $\sum |a_n| < \infty$), поэтому рассуждения автора излишни. б) Соотношение (2) неверно: вместо $\sum b_n$ должен быть 0. А. А.Конюшков

6270. О последовательности коэффициентов Фурье. Сингх (On a sequence of Fourier coefficients. Singh Basudeo), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 5, 796—803 (англ.)

Для $f(x)\in L(-\pi, \pi)$ ряд, сопряженный к ряду Фурье, запишем в виде

$$\sum_1^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_1^{\infty} B_n(x) \qquad (1)$$

и положим

$$l = f(x+0) - f(x-0), \quad \psi(t) = f(x-t) - f(x-t) - l.$$

Доказывается теорема: Если $\int_0^t \psi(u)\,du = o(t)$ при $t \to 0$ и $\int_{\varepsilon}^{\delta} t^{-1}|\psi(t+\varepsilon) - \psi(t)|\,dt \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то последовательность $\{nB_n(x)\}$ будет суммироваться $(C, 1)$ к l/π.

Применяя вторую тауберову теорему, автор получает в качестве следствия известный признак сходимости ряда (1), аналогичный признаку Лебега сходимости ряда Фурье. А. А. Шнейдер

6271. О первом среднем Чезаро ряда, полученного дифференцированием ряда Фурье. Моханти, Нанда (Note on the first Cesaro mean of the derived Fourier series. Mohanty R., Nanda M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 4, 566—570 (англ.)

Пусть $f(t)\in L(-\pi, \pi)$ имеет период 2π и

$$f(t) \sim a_0/2 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Введем обозначения:

$$\sum_1^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt) = \sum_1^{\infty} nB_n(t),$$

$$S_n(x) = \sum_{r=1}^{n} rB_r(x), \quad t_n(x) = (S_1 + \ldots + S_n)/n,$$

$$g(t) = [f(x+t) - f(x-t)]/[2\sin(t/2)].$$

В работе доказываются теоремы:

1. Если $\int_0^t |g(u) - c|\,du = o(t)$ при $t \to 0$, то $t_n = o(\log n)$.

2. Если $g(t) \to c$ при $t \to 0$, то $\sum_{r=1}^{\infty}{}' rB_r(x)/\log(r+1)$ суммируем $(C, 1)$. В. К. Захаров

6272. О приближении тригонометрическими полиномами. Яно (On approximation by trigonometric

polynomials. Yano Shigeki), Kōdai Math. Sem. Repts, 1956, 8, № 2, 93—95 (англ.)

Доказывается теорема: Если последовательность экспоненциальных полиномов $s_n(x)=\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu^{(n)} e^{i\nu x}$ обладает следующими свойствами: 1) $\int_0^{2\pi}|s_n(x)|\,dx\leqslant M$, 2) существуют постоянные ε, C и интервал (a, b) такие, что

$$|s_n(x)|\leqslant Ce^{-\varepsilon n},\quad x\in(a,b),$$

то при выполнении дополнительного условия

$$\varepsilon(b-a)>2\pi\min_{0<t<\infty}2t(e^t+1)/(e^t-1) \qquad (1)$$

$s_n(x)\to 0$ равномерно во всем промежутке $(-\pi, \pi)$.

Эта теорема была сформулирована Бохнером (Bochner S., Contribution to Fourier Analysis, Ann. Math. Studies, 1950, 25, 3—23) без дополнительного условия (1). В бохнеровской формулировке теорема неверна. Ф. И. Харшиладзе

6273. О порядке приближения функций чезаровскими средними их рядов Фурье. Флетт (On the degree of approximation to a function by the Cesàro means of its Fourier series. Flett T. M.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 26, 81—95 (англ.)

Пусть $f(x)$ — суммируемая периода 2π функция с рядом Фурье

$$a_0/2+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k(x)\quad(\rho_k(x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (1)$$

пусть $\sigma_n^r(x)$ — (C, r)-среднее ряда (1) и

$$\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

Доказывается:

1. Если $0<\alpha<1$, $0<\delta\leqslant\pi$, а x — точка, в которой

$$\int_0^t|d\varphi_x(u)|\leqslant At^\alpha\ (0\leqslant t\leqslant\delta), \qquad (2)$$

то

$$\sigma_n^\alpha(x)-f(x)=O(n^{-\alpha}). \qquad (3)$$

2. Пусть $\omega(t)>0$ и возрастает до $+\infty$ вместе с t. Тогда для каждого $\alpha\ (0<\alpha<1)$ существует функция $f(x)$ ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$, для которой

$$\varphi_0(t)=O(t^\alpha),\quad \int_0^t|d\varphi_0(u)|=O[t^\alpha\omega(t^{-1})],$$

однако

$$\sigma_n^\alpha(0)-f(0)\neq O(n^{-\alpha}).$$

Предложение 2 указывает, что условие (2) является в известном смысле существенным для выполнения (3). Кроме того, устанавливается:

3. Если $0\leqslant\beta<1$, $0<\delta\leqslant\pi$, $r\geqslant\alpha-\beta$, а x — точка, в которой

$$\rho_n(x)=O(n^{-\beta}),\ \int_0^t|d\varphi_x(u)|\leqslant At^\alpha\ (0<\alpha\leqslant 1,\ 0\leqslant t\geqslant\delta),$$

то
$$\sigma_n^r(x)-f(x)=\begin{cases}O(n^{-\alpha}), & 0<\alpha<1, \qquad (4')\\ O(n^{-1}\log n), & \alpha=1. \qquad (4'')\end{cases}$$

(4″) справедливо также при $\beta=1$.

Из (4′) следует, что при условиях: $f\in L(-\pi, \pi)$, $f\in\mathrm{Lip}\,1$ в $[a, b]$, $a_n=O(n^{-\beta})$, $b_n=O(n^{-\beta})$ $(0\leqslant\beta\leqslant 1)$ выполняется соотношение

$$\sigma_n^r(x)-f(x)=O(n^{-1}\log n)\ (r\geqslant 1-\beta).$$

Соответствующая теорема установлена также и для классов $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$. Аналогичные предложения доказаны для рядов, сопряженных к рядам (1).

Предложение 1 примыкает к результату Обрешкова (Obrechkoff N., Bull. Soc. Math. France, 1934, 62, 84—109), показавшего при некоторых ограничениях относительно $\varphi_x(t)$, что для $r>\alpha\ (0<\alpha<1)$ выполняется соотношение $\sigma_n^r(x)-f(x)=O(n^{-\alpha})$. При доказательстве предложения 1 применялись методы, принадлежащие Харди и Литлвуду (Hardy G. H., Littlewood J. E., Proc. London Math. Soc., 1928, 28, 301—311). Случай $r=1$ для функций классов $\mathrm{Lip}\,\alpha$ исследовался С. Н. Бернштейном (Mem. Acad. roy. Belgique, 1912, 4, 1—103) и С. М. Никольским (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, 4, № 6, 501—508). Случай $r=0$ см. в работе Салема и Зигмунда (Salem R., Zygmund A., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, 59, 14—22).

И. М. Ганзбург

6274. О взвешенном приближении в пространстве L_p $(-\infty, \infty)$. Мамедов Р. Г., Азәрб. дөвләт пед. инст., әсәрләри, Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, 2, 154—158

Пусть $g(x)\in L_p(\varphi)$, $p\geqslant 1$, т. е.

$$\|g\|_\varphi^p=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)/\varphi(x)|^p dx\right\}^{1/p}<+\infty,$$

где $\varphi(x)>0$ на $(-\infty, \infty)$.

Пусть далее

$$E_{\varphi(x)}^{(n)}(f)_p=\inf\|f-P_n\|_\varphi^p,$$

где P_n — любой многочлен степени $\leqslant n$. Пользуясь тем, что система функций $\{(x^2+k^2)^{-1}\}_1^\infty$ замкнута в пространстве непрерывных функций, равных нулю в бесконечности, и в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ $(p\geqslant 1)$, автор, незначительно изменяя рассуждение Н. И. Ахиезера, доказывает теорему: Пусть $f(x)\in L_p(\varphi)$, $p\geqslant 1$, и $\varphi(x)\geqslant 1$ $(-\infty<x<\infty)$ — любая непрерывная функция. Если существует последовательность многочленов $\{R_{2n}(x)\}$, положительных на $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих условиям $\sqrt{R_{2n}(x)}-\varphi(x)>0\ (-\infty<x<\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln R_{2n}(x)}{1+x^2}\,dx=\infty,$$

то $E_{\varphi(x)}^{(n)}(f)_p\to 0$ при $n\to\infty$. А. Б. Тавадян

6275. Приближение интерполяционными полиномами С. Н. Бернштейна непрерывных функций. Берман Д. Л., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 3, 397—400

Пусть $P_n(f, x)$ — интерполяционный полином С. Н. Бернштейна степени $n-1$, построенный для корней полинома П. Л. Чебышева $T_n(x)=\cos n=(\arccos x)$ и функции $f(x)$, определенной на $[-1, 1]$ (Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., Гостехиздат, 1949, 574—582).

Доказывается:

1. Пусть $f(x)$ непрерывна в $[-1, 1]$; тогда

$$|P_n(f, x)-f(x)|\leqslant 16l\sqrt{2}\,\omega(4l\pi n^{-1})+$$

$$+\pi^2|T_n(x)|\sum_{k=1}^{[n/2l]}k^{-2}\omega(2l(k+1)n^{-1})+$$

$$+4l|T_n(x)|\,\omega(\pi n^{-1}),$$

где $\omega(h)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

2. Пусть C_ω — множество тех непрерывных в $[-1, 1]$ функций $f(x)$, для которых

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant K(f)\,\omega(h),\ -1 \leqslant x \leqslant x+h \leqslant 1,$$

где константа $K(f)$ зависит лишь от f.

При $l=1$ существует такая $f^* \in C_\omega$, что

$$|P_n(f^*, 0)-f^*(0)| > \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n}\int_{1/n}^{1}\frac{\omega(x)}{x^2}\,dx.$$

М. Д. Калашников

6276. Сходимость интерполяционного процесса Лагранжа, построенного для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением. **Берман Д. Л.**, Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 1, 9—12

Пусть: 1) $x_k^{(n)}\ (k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ — бесконечная треугольная матрица узлов на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 2) $L_n(f; x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\,l_k^{(n)}(x)$ — лагранжев интерполяционный многочлен.

1. Пусть $x_k^{(n)}$ удовлетворяют условиям: А. В каждой точке $x \in [-1, 1]$ выполняются неравенства: при $x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)} < x$ $\left|l_k^{(n)}(x)\right| \leqslant \left|l_{k+1}^{(n)}(x)\right|$, $n \geqslant n_0$, при $x \leqslant x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)}$ $\left|l_k^{(n)}(x)\right| \geqslant \left|l_{k+1}^{(n)}(x)\right|$, $n \geqslant n_0$; В. Существует такая неотрицательная убывающая функция $\varphi(h)$ $[\varphi(h) \to 0,\ h \to \infty]$, что если h есть число узлов, лежащих на отрезке $\left[x, x_k^{(n)}\right]$, то $\left|l_k^{(n)}(x)\right| \leqslant N\varphi(h)$, $n \geqslant n_0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Тогда для каждой абсолютно непрерывной на $[-1, 1]$ функции f

$$L_n(f; x) \to f(x),\ n \to \infty \qquad (1)$$

равномерно относительно x. Теорему 1 можно сформулировать локально, если требовать выполнения условий А и В в точке x.

2. Если $x_k^{(n)}\ (k=1, \ldots, n)$ суть корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(x)$, $-1 \leqslant \alpha_n, \beta_n \leqslant \lambda < 0$, то для всякой абсолютно непрерывной функции на $[-1, 1]$ равномерно будет выполняться (1). Если же $x_k^{(n)}$ суть корни многочлена Лежандра и f абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$, то при $-1 < x < 1$ имеет место (1), причем сходимость равномерная на всяком сегменте вида $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$.

3. Пусть для $x_k^{(n)}$ выполняются условия А и В теоремы 1 и f имеет ограниченное изменение на $[-1, 1]$. Тогда во всякой точке непрерывности f имеет место (1).

4. Если $x_k^{(n)}$ суть корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(x)$, $-1 \leqslant \alpha_n$, $\beta_n \leqslant 0$ и f имеет ограниченное изменение на $[-1, 1]$, то во всех точках непрерывности f имеет место (1).

Теоремы 1 и 3 доказываются проверкой выполнения известных условий сходимости интерполирования для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением (РЖМат, 1957, 895). Теоремы 2 и 4 суть следствия теорем 1 и 3 и более ранней работы автора (Докл. АН СССР, 1948, **60**, № 3, 333—336).

В. И. Крылов

6277. Распространение двух теорем С. Н. Бернштейна на аналитические функции многих переменных. **Морозов М. И.**, Уч. зап., Ивановск. гос. пед. ин-та, 1956, **10**, 6—18

Распространяются на функции многих переменных теоремы С. Н. Бернштейна, дающие условия, необходимые и достаточные для регулярности функции $f(z)$. внутри эллипса или полосы. Для простоты рассматриваются функции двух переменных.

Эти результаты представляют собой некоторое развитие теоремы С. Н. Бернштейна (Сообщ. Харьковск. матем. о-ва, 1912, **2**, 13) о свойствах аналитической функции многих переменных.

Через $\overline{D}_z(R)$ обозначается замкнутая область комплексной z-плоскости $(z=x+iu)$, ограниченная эллипсом с фокусами в точках 1 и —1 и полусуммой осей R; через $\overline{D}_w(R)$ — такая же область в w-плоскости $(w=y+iv)$. Функция $f(x,y)$, аналитическая относительно x и y в совокупности в квадрате $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$, называется равномерно ограниченной относительно y в области $\overline{D}_z(R)$, если $|f(z, y_0)| < M$ при любых $y_0 \in [-1, 1]$ и $z \in \overline{D}_z(R)$; M не зависит от y_0. Аналогично определяется равномерная ограниченность $f(x, y)$ относительно x в области $\overline{D}_w(R)$. Функция $f(x, y)$, равномерно ограниченная относительно y в $\overline{D}_z(R)$ и относительно x в $\overline{D}_w(R)$, называется равномерно ограниченной относительно x и y на эллипсе $E(R)$ с фокусами в точках —1 и 1 и полусуммой осей R.

Через $E_n[f]$ обозначается наилучшее приближение $f(x, y)$ в квадрате $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$ многочленами степени не выше n по каждой из переменных x и y.

Доказывается теорема (III): Для того чтобы функция $f(x, y)$ была аналитической в квадрате $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$ относительно x и y в совокупности и равномерно ограниченной относительно x и y на всяком эллипсе $E(R)$ с фокусами в точках —1 и 1 и полусуммой осей $\tilde{R}$, $1 < \tilde{R} < R$, необходимо и достаточно, чтобы было справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n[f]} = 1/R.$$

Вводятся также понятия предельного эллипса линейной регулярности (с полусуммой осей R_0) и предельного эллипса регулярности (с полусуммой осей R^*) и доказывается (теорема I), что $R^* \leqslant R \leqslant R_0$. Кроме того, доказываются аналогичные теоремы (IV и II) для периодических функций.

М. К. Потапов

6278. Вопросы единственности или множественности решений чебышевской задачи для системы несовместных линейных уравнений и понятие нормального чебышевского решения. **Ремез Е. Я.**, Укр. матем. ж., 1956, 8, № 1, 34—53

Рассматривается задача приближенного решения несовместной системы линейных относительно $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнений

$$\Phi_i(x) \equiv \varphi_i(x) + b_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0\ (i=\overline{1, N}) \qquad (1)$$

по чебышевскому принципу наилучшего равномерного приближения, т. е. по принципу минимизации

$$\max_{i=\overline{1,N}} |\Phi_i(x)| \equiv L(x) = \min \qquad (2)$$

(a_{ij}, b_i и x_j предполагаются вещественными). Автор придерживается терминологии, принятой им в предыдущей работе (РЖМат, 1956, 2923).

Элементарной подсистемой $\mathfrak{f} = \{Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_r}\}$ системы уравнений (1) называется всякая подсистема, в которой формы $\varphi_{i_\nu}(x)$ $(\nu=\overline{1, r})$ связаны линей-

ной зависимостью в узком смысле: $\sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \varphi_{i_\nu}(x) \equiv 0$ ($C_\nu \neq 0$; отношения $C_1 : C_2 : \ldots : C_r$ определяются однозначно; $r-1$ — ранг матрицы коэффициентов $\|a_{i_\nu j}\|$). Чебышевская задача типа (1)—(2) для элементарной подсистемы $\mathfrak{f}$ имеет решение, совпадающее с решением другой, заведомо совместной системы r линейных уравнений

$$\Phi_{i_\nu}(x) \equiv \varphi_{i_\nu}(x) + b_{i_\nu} = \lambda \cdot \operatorname{sgn} C_\nu \quad (\nu = \overline{1, r}), \qquad (3)$$

где $\lambda = \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu b_{i_\nu} / \sum_{\nu=1}^{r} |C_\nu|$. Уравнения Q_{i_ν}, имеющие чебышевские точки уклонения, автор называет T-уравнениями. Совокупность всех T-уравнений задачи (1)—(2), тождественная с соединением $\bigcup_\tau \mathfrak{f}_\tau$ всех неприводимых чебышевских подсистем системы уравнений (1), образует «наибольшую чебышевскую подсистему» $\mathfrak{m} \equiv \{Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_s}\}$. Каждому из уравнений $\varphi_{i_\nu}(x) + b_{i_\nu} = 0$ ($\nu = \overline{1, s}$) этой системы (с учетом неприводимой чебышевской подсистемы $\mathfrak{f}_\tau \subseteq \mathfrak{m}$, которой оно принадлежит) сопоставляется уравнение $\varphi_{i_\nu}(x) + b_{i_\nu} = \Phi_{i_\nu 0}$ ($\nu = \overline{1, s}$), где $\Phi_{i_\nu 0}$ однозначным образом определяется из формул (3), относящихся к подсистеме $\mathfrak{f}_\tau$.

Пусть q означает ранг матрицы коэффициентов $\|a_{i_\nu j}\|$ ($\nu = \overline{1, s}$; $j = \overline{1, n}$). Тогда, если $q = n$, то задача (1)—(2) имеет единственное решение; если $q < n$, то эта задача имеет ∞^{n-q} решений.

Далее в работе указывается прием нахождения всех чебышевских решений задачи и особо выделяется «наилучшее решение» (в некотором смысле), нахождение которого сводится к решению «вспомогательной» чебышевской задачи для подсистемы меньшего числа ($N-s$) уравнений с меньшим значением наилучшего приближения. Если решение «вспомогательной» задачи единственно, то можно сразу получить «нормальное» решение задачи (1)—(2). Если же решение «вспомогательной» задачи многозначно, то составляя для нее новую «вспомогательную» задачу, находят «нормальное» чебышевское решение или вновь сводят к следующей «вспомогательной» задаче. После конечного числа таких операций приходят к единственному решению «вспомогательной» задачи, что дает возможность получить «нормальное» чебышевское решение задачи (1)—(2).

Изложенная теория иллюстрирована решением числового примера. В конце работы рассмотрена векторная формулировка задачи (1)—(2). Библ. 23 назв.

Б. А. Рымаренко

6279. Некоторое обобщение тригонометрической системы функций и его применения. Золин А. Ф., Докл. АН УзССР, 1956, № 12, 3—6 (рез. узб.)

На систему функций

$$\{\psi^k(\theta)\cos k\theta, \psi^k(\theta)\sin k\theta\} \quad (k = 0, 1, \ldots; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \qquad (1)$$

где функция $\psi(\theta)$ является правой частью уравнения эллипса Γ в полярных координатах, переносится ряд свойств тригонометрической системы.

1. Система (1) является системой А. А. Маркова, т. е. при любом n первые n ее функций образуют систему Чебышева.

2. Система (1) позволяет интерполировать периодические функции, причем при любых узлах обобщенный интерполяционный многочлен является единственным.

3. Для всякой непрерывной функции $f(\theta)$, заданной на $[0, 2\pi]$, существует система узлов, при которой интерполяционный многочлен по системе (1) равномерно сходится к $f(\theta)$.

4. Если за узлы взять точки

$$\theta_i = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\frac{2\pi i}{2n+1}\right)$$

($i = 0, 1, \ldots, 2n$; a и b — полуоси эллипса Γ), то интерполяционный процесс равномерно сходится, если интерполируемая функция $f(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица.

Указываются приложения системы (1) к решению для эллипса проблемы Дирихле для уравнения Лапласа и к приближенному нахождению функции, конформно отображающей внутренность эллипса на единичный круг.

Примечание референта. При доказательстве свойства 4 имеются неточности, не имеющие существенного значения. Б. М. Гагаев

6280. Определение асимптотического значения приближения одной аппроксимационной формулы, когда ядром является цилиндрическая функция. Мираакьян Г. М., Тр. Одесск. ун-та, 1956, 146, сер. матем. н., № 6, 47—51

Подробное изложение ранее сформулированных результатов (РЖМат, 1957, 3009). Е. В. Вороновская

См. также: 6469, 6476, 6477, 6483, 6497, 6498, 6507 К

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

6281. Относительно комплексных сопряженных функций. Тивари, Бхаттачария (Concerning the complex conjugate of a function. Tiwari S. Y., Bhattacharya B.), Amer. J. Phys., 1955, 23, № 9, 624 (англ.)

Авторы заметки отмечают, что в некоторых книгах (например, Rojansky V., Introductory quantum mechanics, New York, 1938, p. 32) указывается на получение комплексной сопряженной функции f^* для данной функций f путем изменения знака перед i в аргументе функции. Но это, как показывают авторы на примерах, может приводить к ошибкам (в частности, для многозначных функций).

Поэтому авторы подчеркивают, что при получении комплексной сопряженной для функции f необходимо, как обычно, вначале ее представить в виде $f = f_1 + if_2 = re^{i\theta}$, после чего изменить знак перед i

С. Е. Белозеров

6282. Кольца аналитических функций. Какутани (Rings of analytic functions. Kakutani Shizuo, Lect. Funct. Complex Variable. Ann. Arbor. Univ. Michigan Press, 1955, 71—83 (англ.)

$A(D)$ (соответственно $B(D)$) означает кольцо всех аналитических (соответственно ограниченных аналитических) функций в области D на комплексной плоскости. Доказывается теорема: $A_1(D_1)$ и $A_2(D_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда области D_1 и D_2 конформно отображаются друг на друга. Аналогичная теорема имеет место для колец $B(D)$.

Г. Е. Шилов

6283. О суммируемости методом Эйлера одного класса рядов Дирихле. Каулинг (On the Euler summa-

bility of a class of Dirichlet series. Cowling V. F.), Tohoku Math. J., 1955, 7, № 3, 240—242 (англ.)

Рассматривается суммирование методом Эйлера — Кнопа ряда Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-r_n z}, \qquad (1)$$

где $r_n=(n+1)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$. Когда $\alpha=1$, ряд (1) с помощью подстановки $x=e^{-z}$ переходит в ряд Тейлора, для которого соответствующий вопрос исследован Кнопом, Агнью и др; случай обыкновенного ряда Дирихле, т. е. когда $r_n=\ln(n+1)$, был исследован референтом.

Автор доказывает следующую теорему: Положим

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{k+1}(1-r)^{n-k}a_k e^{-(k+1)^{\alpha}z_0}.$$

Пусть ряд $\sum_{p=0}^{\infty} A_p r^{-p}$ сходится для некоторого $0<r_0<1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-r_n z}, \quad r_n=(n+1)^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1,$$

абсолютно суммируем E_r для $r>r_0$ и всякого z, удовлетворяющего неравенству $\pi(1-\alpha)/2>|\arg(z-z_0)|$.

Н. Обрешков

6284. Об одном классе гильбертовых пространств аналитических функций. Фишман К. М., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 1, 24—27

Полагая $E(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n/\alpha_n$, $0<\alpha_n<\infty$, $\lim \sqrt[n]{\alpha_n}=1$, автор рассматривает гильбертово пространство Z_E^2 аналитических в единичном круге C_1 функций $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\alpha_n<\infty$, со скалярным произведением для $f(z)$ и $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

$$(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{b}_n\alpha_n. \qquad (1)$$

Z_E^2 есть гильбертово пространство с воспроизводящим ядром (Повзнер А. Я., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1952, 40) в том смысле, что всякая функция $f(\zeta)\in Z_E^2$ в силу (1) представима в виде

$$f(\zeta)=(f(z),\ E(\bar{\zeta},z)),\ |\zeta|<1. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что Z_E^2 полное сепарабельное гильбертово пространство, сходимость в котором влечет равномерную сходимость в любом замкнутом множестве, лежащем внутри C_1. Z_E^2 совпадает с классом аналитических функций H_2 Рисса, если $E(z)=\frac{1}{1-z}$ и совпадает с классом $H_2(\alpha)$, $\alpha>-1$, Джрбашяна, если $E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)}z^n$. Полагая

$$\alpha_n=\int_0^1 \sigma(\rho)\rho^{2n}d\rho, \qquad (3)$$

где $\sigma(\rho)$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, суммируемая на $[0,1]$ функция такая, что для всякого $\varepsilon>0$ существуют k_ε и K_ε, для которых $0<k_\varepsilon\leqslant\sigma(\rho)\leqslant K_\varepsilon<\infty$, $\varepsilon\leqslant\rho\leqslant 1-\varepsilon$, автор получает пространство $Z_{E_\sigma}^2$, содержащее класс H_2, если же $\sigma(\rho)=e^{1/(\rho-1)}$, то $Z_{E_\sigma}^2$ содержит все классы Джрбашяна. Ряд Фурье функции $f(z)\in Z_E^2$ по ортонормированному базису $\{\psi_k(z)\}$ сходится к $f(z)$ равномерно в любом замкнутом множестве, лежащем внутри C_1, и равномерно во всем C_1 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{E(|z|^2)}}\left[f(z)-\sum_{k=1}^{n}(f,\psi_k)\psi_k(z)\right]=0$.

Если $f(z)\in Z_{E_\sigma}^2$, то согласно (2), (3)

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} f(z)\,E(\bar{\zeta}z)\,\sigma(\rho)\,d\rho d\theta,\ z=\rho e^{i\theta}.$$

Проектируя в пространстве L_σ^2 функций $F(\rho,\theta)$, для которых $\int_0^1\int_0^{2\pi}|F(r,\theta)|^2\sigma(\rho)\,d\rho d\theta<\infty$, функцию $F(\rho,\theta)\in L_\sigma^2$ на $Z_{E_\sigma}^2$ с помощью оператора $PF=(F,E(\bar{\zeta}z))$, автор получает интегральное представление функций класса $Z_{E_\sigma}^2$.

С помощью одного результата М. Г. Крейна (Укр. матем. ж. АН СССР, 1949, № 4) из (2) вытекает: $f^{(n)}(\zeta)=(f(\zeta),\ z^nE^{(n)}(\bar{\zeta}z))$, $|\zeta|<1$; это позволяет заключить, что из $f^{(n)}(\beta_n)=0$, $n=0,1,\ldots$ следует $f(z)\equiv 0$ в том и только в том случае, когда система $\{z^nE^{(n)}(\bar{\beta}_n z)\}$ полна в Z_E^2. Предполагая полноту этой системы и ортогонализируя ее по известным формулам, автор выписывает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы существовала функция $f(z)\in Z_E^2$, для которой $f^{(n)}(\beta_n)=\gamma_n$, $n=0,1,\ldots$, где $\{\gamma_n\}$ — наперед заданная последовательность комплексных чисел.

М. Г. Хапланов

6285. О полноте некоторых систем аналитических функций. Хапланов М. Г., Уч. зап. Ростовск. н/Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 53—58

Используя ранее полученные им результаты, автор доказывает следующие признаки полноты системы функций:

I. Если функция $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$ регулярна в круге $|z|<R$ и отлична от рациональной, то система функций $f_k(z)=a_k+a_{k+1}z+\ldots$ полна в круге $|z|<R$.

II. Если функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ регулярна в круге $|z|<R$ и отлична от рациональной, $q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ регулярна в круге $|z|<R_1$ и имеет отличные от нуля коэффициенты, то система функций $f_k(z)=b_0a_k+b_1a_{k+1}z+b_2a_{k+2}z^2+\ldots$ полна в круге $|z|<R\cdot R_1$.

III. Если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$, $f(0)\neq 0$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ сходится, то система функций $\{z^nf(a_nz)\}$ образует базис в круге $|z|<r$, $r<R/a^*$, где a^* — верхняя грань чисел $|a_n|$.

IV. Если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$, все коэффициенты ее тейлоровского разложения отличны от нуля, существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|$ сходится, то система функций $\{z^nf^{(n)}(a_nz)\}$ образует базис в круге $|z|<r$, $r<R/a^*$, где a^* — верхняя грань чисел $|a_n|$.

Э. З. Шувалова

6286. Критерии полноты некоторых систем аналитических функций. Еремин С. А., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 221—233

В работе референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1939, № 5—6) найдено условие полноты системы функций $\{z^n f^{(n)}(z)\}$ в случае, когда $f(z)$ — аналитическая в конечном круге, и условие полноты системы последовательных производных $\{f^{(n)}(z)\}$ в случае, когда $f(z)$ — периодическая аналитическая функция (Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, **11**, 75—100).

В реферируемой работе рассматривается полнота системы функций

$$\left\{\frac{z^n}{n!}+f^{(n)}(z)\right\} \text{ и } \{f^{(n)}(z)\} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

в случае, когда $f(z)$ — аналитическая в конечном круге $|z|\leqslant R$, и в случае, когда $f(z)$ — целая аналитическая функция. В обоих случаях условия полноты даются с помощью определителей, составленных из коэффициентов Тейлора функции $f(z)$, которые мы не приводим ввиду их громоздкости. В работе имеется ряд опечаток и непонятных для референта утверждений.

И. И. Ибрагимов

6287. Доказательство теоремы Осгуда-Каратеодори методом экстремальных точек. Клейнер (Démonstration du théorème de Osgood-Carathéodory par la méthode des points extrémaux. Kleiner W.), Ann. polon. math., 1955, **2**, № 1, 67—72 (франц.)

Автор дает новый метод доказательства известной теоремы о возможности гомеоморфного расширения на границу областей конформного отображения односвязной области, ограниченной простой замкнутой кривой на единичный круг (обобщение теоремы Римана, известное как теорема Осгуда-Каратеодори). Для этой цели он рассматривает неограниченную область и отображает ее на внешность единичного круга. Отображающая функция представляется посредством экстремальных точек. Экстремальные точки были введены Фекета (Fekety) при определении трансфинитного диаметра и использовались затем в многочисленных работах Лея (F. Leja). Если ограниченное замкнутое множество C на комплексной плоскости содержит более чем n точек (обычно оно предполагается бесконечным), тогда система точек множества C $\eta_0^n, \eta_1^n, \ldots, \eta_n^n$ называется экстремальной порядка n, если они выбираются так, что произведение $v_n=\prod_{0\leqslant i<k\leqslant n}|\eta_i^n-\eta_k^n|$ является наибольшим. Лея доказал, что возможно выбрать действительные числа θ_n и ветви корня так, что если $f_n(x)=e^{i\theta_n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\eta_k^n}{\eta_0^n-\eta_k^n}}$, тогда мы имеем: 1) $f_n(a)>0$ для некоторой фиксированной точки области D — неограниченной компоненты дополнения множества C; 2) существует предел $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ для $z\in D$, $f(\infty)=\infty$ и функция $f(z)$ отображает конформно область D на внешность круга $|w|>1$. При этом нумерация точек делается так, что

$$\prod_{k=1}^{n}|\eta_0^n-\eta_k^n|\leqslant\prod_{k=0\ k\neq i}^{n}|\eta_i^n-\eta_k^n| \text{ для } i=1,2,\ldots,n$$

(Leja F., Ann. Soc. polon. math., 1933, **12**, 57—71; 1935, **14**, 116—134).

Автор доказывает, что если C — жорданова кривая, функция $f(z)$ таким образом определенная может быть гомеоморфна продолжена на кривую C. Доказательство состоит в доказательстве существования предела $\lim_{z\to z_0}\arg f(z)$ для $z_0\in C$ (существование предела $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=1$ следует сразу из теоремы Римана). Метод доказательства является изящным и дает существенное усиление результата Лея Z. Zahorski.

6288. О непрерывности однолистных отображений произвольных замкнутых областей. Суворов Г. Д., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 103—104

Резюме доклада, содержание которого изложено автором в заметке того же названия (РЖМат, 1957, 4766). Л. Д. Кудрявцев

6289. К конформному отображению на нормальные области. Ренгли (Zur konformen Abbildung auf Normalgebiete. Renggli Heinz), Comment. math. helv., 1956, **31**, № 1, 5—40 (нем.)

Пользуясь понятием экстремальной длины, введенным Альфорсом и Берлингом (Ahlfors L., Beurling A., Acta math., 1950, **83**, 101), автор устанавливает понятие нормальной области (одно- или многосвязной) и изучает свойства нормальных областей. При этом оказывается, что применяемые в классических исследованиях однолистные канонические области, получающиеся из плоскости проведением разрезов по отрезкам прямых одного и того же пучка (параллельного или сходящегося) или вдоль дуг семейства концентрических окружностей, тоже являются нормальными в смысле определения автора. Доказывается, что надлежащим образом нормированное конформное отображение некоторой области на нормальную область является единственным. Устанавливаются весьма общие условия отобразимости многосвязной области на нормальную область. Доказательство существования искомого конформного отображения основывается на доказательстве возможности решения некоторой экстремальной задачи, формулируемой в терминах теории экстремальной длины и так называемой экстремальной метрики.

В силу обилия специальных вспомогательных понятий формулировка основных теорем работы в реферате затруднительна. Есть ссылки на 15 работ, вышедших из печати не позже 1953 г. Сама работа сдана в 1955 г. В. А. Зморович

6290. Об однолистных функциях в многосвязных областях. Аленицын Ю. Е., Матем. сб., 1956, **39**, № 3, 315—336

Автор доказывает теоремы, сформулированные им в одноименной заметке (РЖМат, 1956, 6526), и несколько ее дополняет. Г. Г. Шлионский

6291. К теории ограниченных однолистных функций. Шлионский Г. Г., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 5, 962—964

Рассматриваются следующие два класса функций: S_M — класс функций $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, регулярных и однолистных в $|z|<1$ с $|f(z)|<M$; $\sum_m$ — класс функций $F(\zeta)=\zeta+a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\ldots$, мероморфных и однолистных в $|\zeta|>1$ с $|F(\zeta)|>m$.

Для $F(\zeta)\in\sum_m$ при любых ζ_ν, $\nu=1,\ldots,n$, $|\zeta_\nu|>1$, получены оценки снизу и сверху для

$$\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|\frac{F(\zeta_\nu)-F(\zeta_{\nu'})}{\zeta_\nu-\zeta_{\nu'}}\right|^{\alpha_{\nu\nu'}}$$

при любых вещественных $\alpha_{\nu\nu'}$, образующих положительную квадратичную форму $\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\alpha_{\nu\nu'}x_\nu x_{\nu'}$.

В этом же классе функций при любых γ_ν, $\gamma'_{\nu'}$ и ζ_ν, $\zeta'_{\nu'}$ из $|\zeta|>1$ получена оценка сверху для

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma'_{\nu'}\ln\frac{F(\zeta_\nu)-F(\zeta_{\nu'})}{\zeta_\nu-\zeta_{\nu'}}\right|.$$

Пусть $F(\zeta)\in\sum_m$,

$$\ln\frac{F(x)-F(y)}{x-y}=\sum_{\nu,\nu'=1}^{\infty}a_{\nu\nu'}x^{-\nu}y^{-\nu'},\qquad(1)$$

$$-\ln\left(1-\frac{m^2}{F(x)\overline{F(y)}}\right)=\sum_{\nu,\nu'=1}^{\infty}b_{\nu\nu'}x^{-\nu}\overline{y^{-\nu'}},$$

$$b_{\nu\nu'}=\overline{b_{\nu'\nu}}\qquad(2)$$

При любых комплексных $x_1,\ldots,x_n$; $x'_1,\ldots,x'_{n'}$ получена оценка сверху для $\left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\nu'=1}^{n'}a_{\nu\nu'}x_\nu x'_{\nu'}\right|$.

Для того чтобы функция $F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\ldots$, регулярная в $|\zeta|>1$, исключая $\zeta=\infty$, была функцией класса $\sum_m$, необходимо и достаточно, чтобы при любых комплексных $x_1,\ldots,x_n$ и обозначениях (1) и (2) выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu\nu'}x_\nu x_{\nu'}\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|x_\nu|^2}{\nu}-\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}b_{\nu\nu'}x_\nu\bar{x}_{\nu'}.$$

Для функций $f(z)\in S_M$ при любых $\gamma_{\nu\nu'}$ и z_ν, $z_{\nu'}$ из $|z|<1$ получена оценка сверху для

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\nu'=1}^{n'}\gamma_\nu\gamma'_{\nu'}\Phi''_{xy}(z_\nu,z'_{\nu'}),$$

где

$$\Phi(x,y)=\ln\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\frac{xy}{f(x)f(y)}.$$

Оценки не приводим вследствие их громоздкости. Доказательства не даны, но указано, что все результаты получены параметрическим методом Лёвнера. Полученные результаты содержат как частные случаи некоторые известные результаты Г. М. Голузина, И. Е. Базилевича, Н. А. Лебедева, Шиффера, Грунского, Л. И. Колбиной и референта.

Ю. А. Аленицын

6292. Некоторые вопросы теории однолистных и типично вещественных функций в круговом кольце. Ли Ен Пир (원환에서의 단엽 및 실수형 함수론의 몇가지 문제. 리 영 필), 조선 민주주의 인민 공화국 과학원 학보, Чосон минчучуе инмин конхвагук гвахаквое хакпо, 1955, № 8, 32—94 (кор.)

Содержание гл. 1 см. РЖМат, 1954, 2096.

В гл. 2 устанавливается оценка модуля для функций $f(z)\in N_s$ в кольце. Здесь через N_s обозначен класс функций $w=f(z)$, $f(1)=1$, звездообразных в кольце $R'_q: m<|z|<M$ $\left(\frac{m}{M}=q,\ m<1<M\right)$.

Рассматриваются граничные свойства гармонических функций в кольце и параметрическое представление для них. Доказывается следующая теорема:

Для функции $f(z)\in N_s$ ($f(1)=1$) имеем в кольце R'_q параметрическое представление

$$f(z)=z\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{P_q(mz^{-1}e^{i\theta})}{P_q(me^{i\theta})}\,d\alpha_m(\theta)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{P_q(M^{-1}e^{-i\theta})}{P_q(M^{-1}ze^{-i\theta})}\,d\alpha_M(\theta)\right],$$

где $\alpha_j(\theta)$, $(j=m,\ M)$ — некоторые неубывающие ограниченные функции с $\alpha_j(0)=0$, $\alpha_j(2\pi)=2\pi$, а

$$P_q(\zeta)=\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-q^{2\nu}\zeta)(1-q^{2\nu+2}\zeta^{-1}).$$

Аналогичная формула получена и для выпуклых функций. Далее на основании этой теоремы доказана следующая теорема:

Для функции $f(z)\in N_s$ справедливы точные оценки при $|z|=r$, $m<r<M$,

$$\left|f_0^{(s)}(-r)\right|\leqslant|f(z)|\leqslant\left|f_\pi^{(s)}(-r)\right|,$$

где

$$f_0^{(s)}(z)=z\left(\frac{P_q(M^{-1})}{P_q(-m)}\right)^2\left(\frac{P_q(-mz^{-1})}{P_q(M^{-1}z)}\right)^2,$$

$$f_\pi^{(s)}(z)=z\left(\frac{P_q(-M^{-1})}{P_q(m)}\right)^2\left(\frac{P_q(mz^{-1})}{P_q(-M^{-1}z)}\right)^2,$$

причем

$$f_0^{(s)}(z)\in N_s,\qquad f_\pi^{(s)}(z)\in N_s.$$

Результаты, содержащиеся в гл. 3, были изложены ранее автором (РЖМат, 1954, 2925). Приведенная там теорема получена также В. А. Зморовичем (Докл. АН СССР, 1952, 86, № 3), но несколько иным путем.

Лим Ен Су

Примечание редакции. Параметрическое представление различных классов однолистных в кольце функций, в том числе и звездообразных, были получены ранее В. А. Зморовичем (РЖМАТ), 1953, 691).

6293. Оценки коэффициентов для некоторых классов аналитических функций. Максимов Ю. Д., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 4, 507—510

Рассматриваются два класса аналитических функций $C_\pi(p,q)$ и $S_\pi(p,q)$ (РЖМат, 1956, 4443). Используя известные точные оценки коэффициентов Тейлора для C-функций Каратеодори (функций с положительной вещественной частью) и звездных функций, автор, исходя из установленной им структурной формулы, находит для функций

$$F(z)=z^q(1+a_1z+a_2z^2+\ldots)\in S_\pi(p,q)$$

с фиксированными модулями нулей α_k точные оценки коэффициентов в виде

$$|a_n|\leqslant A_n,$$

где A_n — коэффициенты разложения Тейлора для функции

$$F(z)=\frac{z_q(1+z)}{(1-z)^{2p+1}}\prod_{k=1}^{p-q}\left(1+\frac{z}{|\alpha_k|}\right)(1+|\alpha_k|z)=$$

$$=z^q(1+A_1z+A_2z^2+\ldots)\in S_\pi(p,q).$$

Как следствие получаются точные оценки коэффициентов для функций

$$f(z)=z^q(1+c_1z+c_2z^2+\ldots)\in C_\pi(p,q)$$

с фиксированными модулями нулей a_k производной в виде

$$|c_n| \leqslant \frac{qA_n}{n}.$$

Аналогично, используя известные оценки для m-симметричных выпуклых функций, автор находит для функций

$f(z) = z + c_{m+1}z^{m+1} + c_{2m+1}z^{2m+1} + \ldots \in c_\pi(1,1)$ точные оценки

$$|c_{nm+1}| \leqslant \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{2}{m}\right)$$

(полученные Г. М. Голузиным для класса m-симметричных звездных однолистных функций, являющегося подклассом класса $c_\pi(1,1)$ и для функций

$F(z) = z + a_{m+1}z^{m+1} + a_{2m+1}z^{2m+1} + \ldots \in S_\pi(1,1)$ точные оценки

$$|a_{nm+1}| \leqslant \frac{nm+1}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{2}{m}\right).$$

В статье имеются опечатки.

Примечание референта. В статье Рида (РЖМат, 1957, 5484) найдены более общие оценки для классов $c_\varepsilon(1,1)$ и $S_\varepsilon(1,1)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi$. С. А Касьянюк

6294. **Две теоремы об ограниченных функциях.** Сато (有界函數の二つの定理 • 佐藤榮義), 數學, Сугаку, 1955, 7, № 2, 99—101 (япон.)

Обобщаются результаты А. В. Гудмана (Goodman A., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 363—369) и Дженкинса (РЖМат, 1954, 2920).

Получены следующие две теоремы: 1. Если обозначить через $L(r, f_M)$ длину дуги $|w| = r$ $(1 > r \geqslant 2M^2 - M - 2M\sqrt{M^2-M})$, которая не покрывается образом круга $|z| < 1$ при отображении функцией $w = f_M(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, $|f_M(z)| < M$ $(M \geqslant 1)$, (1) то имеет место точная оценка

$$L(r, f_M) \leqslant 2r\varphi(M, r),$$

где величина $\varphi(M, r)$ определяется следующим образом: отобразим функцией (1) кольцо $0 < q < |z| < 1$ на область, граница которой состоит из дуги

$$|w| = p,\ |\arg w| \leqslant \delta(pq) \quad (0 < p < q < 1) \qquad (2)$$

и окружности $|w| = 1$, причем $|z| = q$, $|z| = 1$ и $z = -p$ соответственно переходят в дугу (2), окружность $|w| = 1$ и $w = 0$. Функция $H_q(z, p)$, дающая это отображение:

$$H_q(z, p) = z \cdot \theta(qz/p)/\theta(pz/q),$$

$$\theta(z) = \vartheta_3\left(\frac{v}{2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+ q^{2n-1}z^{-1}),\ z = e^{i\pi v},$$

определяется единственным образом. Величина $\delta(p \cdot q)$, определяемая этой функцией, принимает значение $\varphi(M, r)$ при $p = r/M$,

$$\frac{4rM^2}{(M+r)^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{r}{M}q^n\right)^2\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{M}{r}q^n\right)\Big/\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^4$$

2. Пусть функция (1) не принимает значения ξ из $|\xi - c| \leqslant R$. Тогда при определенных c, M,

$$(1 > |c| \geqslant 2M^2 - M - 2M\sqrt{M^2-M})$$

имеют место точные оценки

$$R \leqslant R_0 \equiv \frac{Mq(1-p^2)}{1+p^2q^2} \quad (0 < q < p < 1),$$

причем R_0 определяется единственным способом по p и q, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{4pM}{(1+p)^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^np^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^np)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2 \div$$

$$\div\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^np^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^np)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^2,$$

$$|c| = \frac{Mp(1-q^2)}{1-p^2q^2}.$$

Ли Ен Пир

6295. **О разрывной граничной задаче Римана—Привалова с коэффициентом, имеющим критические точки.** Хведелидзе Б. В., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 1, 40—43

Рассматривается краевая задача

$$\Phi^+(t) = a(t)\Phi^-(t) + b(t) \qquad (1)$$

при условии, что контур Г есть гладкая линия, угол касательной которой с осью абсцисс удовлетворяет условию Гёльдера, коэффициент $a(t)$ имеет вид

$$a(t) = \prod_{k=n_1+1}^{n}(t-c_k)^{\lambda_k}\prod_{k=n+1}^{m}\ln^{\mu_k}(t-c_k)\,a_*(t),$$

где c_k — заданные точки контура, λ_k, μ_k — заданные числа, $a_*(t)$ — не обращающаяся в нуль функция, удовлетворяющая условию Дини всюду, за исключением конечного числа точек $c_1, \ldots, c_n$, где она имеет разрывы 1-го рода, (РЖМат, 1957, 368).

Пусть $\sigma_k = [\lambda_k]$, причем $\sigma_{n_1+1}\ldots\sigma_{n_2} < 0$, $\sigma_{n_2+1}\ldots\sigma_n > 0$. Обозначим

$$Q(z) = \begin{cases} \prod_{k=n_1+1}^{n_2}(z-c_k)^{\sigma_k}, & z \in E^+ \\ \prod_{k=n_2+1}^{n}(z-c_k)^{\sigma_k}, & z \in E^- \end{cases},$$

(E^+ и E^- — конечная и бесконечная области, ограниченные Г).

Доказывается существование решения задачи (1), имеющего конечный порядок на бесконечности, в классе функций

$$\Phi(z) = Q^{-1}(z)\Phi_1(z),\ \Phi_1(z) \in L_p(\Gamma, \omega(t)),$$

и дается его явное выражение через интегралы типа Коши.

Работа представляет собою обобщение работ ряда авторов (Карлеман, Ф. Д. Гахов, Н. И. Мусхелишвили и др.), рассматривавших задачу (1) при более частных предположениях. Ф. Д. Гахов

6296. **Нелинейная задача Гильберта для системы функций.** Погожельский (Problème non linéaire d'Hilbert pour le système de fonctions. Pogorzelski W.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 1, 1—13 (франц.)

На плоскости комплексного переменного имеется p жордановых линий $L_1, L_2, \ldots, L_p$, ограничивающих конечные области $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$, причем $\overline{S_i^-} \cap \overline{S_j^-} = 0$, $i \neq j$, L_0 — замкнутая жорданова линия, заключающая внутри себя все линии $L_1, \ldots, L_p$ и не имею-

щая общих точек с ними. Бесконечная область вне линии L_0 обозначается через S_0^-; область, ограниченная линией L_0 и линиями $L_1, \ldots, L_p$, обозначается через S^+.

Решается следующая задача:

Отыскать функции

$$\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_m(z), \quad (1)$$

любая из которых является голоморфной в каждой из областей $S^+, S_1^-, \ldots, S_p^-$, а их граничные значения $\Phi_\alpha^+(t)$ и $\Phi_\alpha^-(t)$ удовлетворяют в каждой точке множества

$$L = L_0 + L_1 + \ldots + L_p \quad (2)$$

следующим соотношениям:

$$\Phi_\alpha^+(t) = G_\alpha(t)\,\Phi_\alpha^-(t) + \lambda F_\alpha\left[t, \Phi_1^+(t), \ldots, \Phi_m^+(t), \Phi_1^-(t), \ldots, \Phi_m^-(t)\right], \quad (3)$$

где $\Phi^+(t)$ — граничное значение функции Φ в точке t на границе (2) в области S^+ и $\Phi^-(t)$ — граничное значение функции Φ в области $S^- = S_0^- + S_1^- + \ldots + S_p^-$; функции $F_\alpha(z, u_1, u_2, \ldots, u_{2m})$ и $G_\alpha(t)$ являются заданными и λ — параметр.

Автор налагает следующие ограничения на функции F_α и G_α: 1. Каждая из функций $G_1(t), G_2(t), \ldots, G_m(t)$ определена на множестве замкнутых полосок

$$\overline{\Omega}_0, \overline{\Omega}_1, \ldots, \overline{\Omega}_p, \quad (4)$$

заключающих в себе соответственно линии $L_0, L_1, \ldots, L_p$, и является голоморфной внутри каждой полоски в отдельности. Кроме этого, предполагается, что $G_\alpha(t) \neq 0$ на линиях L_ν. Полоски (4) не имеют общих точек. 2. Любая из заданных функций

$$F_\alpha[z, u_1, u_2, \ldots, u_{2m}] \quad (5)$$

является голоморфной в каждой из областей (4) в отдельности, относительно переменной z, и голоморфны относительно каждой переменной $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$ в области.

$$|u_\alpha| \leqslant R. \quad (6)$$

На основании результатов Карлемана, Гахова, Привалова и Хведелидзе задача сводится к решению системы интегральных уравнений

$$\varphi_\alpha(t) = \lambda F_\alpha^*[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2m}(t)] + \lambda \int_L \frac{F_\alpha^{**}[t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2m}(\tau)]}{\tau - t}\, d\tau + f_\alpha^{**}(t), \quad (7)$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, 2m),$$

где неизвестные функции $\varphi_\alpha(t)$ представляются следующим образом:

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} \Phi_\alpha^+(t), & \text{если } \alpha = 1, 2, \ldots, m, \\ \Phi_\alpha^-(t), & \text{если } \alpha = m+1, m+2, \ldots, 2m; \end{cases}$$

функции F_α^* и F_α^{**} выражаются через известные функции F_α, а функции f_α^{**} выражаются через канонические решения однородной задачи Гильберта.

Уравнения (7) не могут быть решены методом регуляризации. Поэтому автор применяет метод последовательных приближений непосредственно к системе (7). J. Wolska

6297. Обобщенная граничная задача Гильберта. П о г о ж е л ь с к и й (Problème aux limites d'Hilbert généralisé. P o g o r z e l s k i W.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 1, 136—144 (польск.)

Дается решение той же задачи, что и в предыдущей работе автора (реф. 6296), но уже при следующих предположениях:

1. Функции $G_\alpha(t)$ определены на множестве L и удовлетворяют условию Гёльдера; кроме того, они принимают значения, отличные от 0.

2. Заданные функции $F_\alpha[t, u_1, \ldots, u_{2m}]$ определяются в области $t \in L$, $|u_\nu| \leqslant R$, и в этой области они удовлетворяют условию Гёльдера относительно переменной t и условию Липшица по переменным $u_1, u_2, \ldots u_{2m}$.

3. Линии $L_1, \ldots, L_p$ имеют непрерывные касательные в каждой точке t. Так же, как и раньше, устанавливается возможность сведения решения рассматриваемой задачи к решению системы сингулярных интегральных уравнений.

Предположения, сделанные относительно данных функций G_α и F_α, являются недостаточными для решения полученной системы уравнений методом последовательных приближений. В этой статье задача решается применением теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Автор рассматривает в банаховом пространстве E множество $S(\varkappa, \mu)$ всех точек $u(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2m})$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} |\varphi_\alpha| \leqslant R, \\ |\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(t')| \leqslant \varkappa |t - t'|^\mu \end{cases} (\alpha = 1, 2, \ldots, 2m),$$

где $\varkappa$ — положительная постоянная и $\mu < 1$ (μ — показатель в условии Гёльдера), появляющаяся в предположениях 1 и 2. Автор показывает, что множество $S(\varkappa, \mu)$ замкнуто и выпукло. Затем он доказывает, что преобразование

$$\psi_\alpha(t) = \lambda F_\alpha^*[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2m}(t)] + f_\alpha(t) + \lambda \int_s \frac{F_\alpha^{**}[t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2m}(\tau)]}{\tau - t}\, d\tau$$

является непрерывным для достаточно малых величин параметра λ и что образ множества S компактен.

Свойства множества S, доказанные выше, дают возможность применить теорему Шаудера о неподвижной точке и получить заключение, что во множестве S существует система функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2m}(t)$, удовлетворяющая системе интегральных уравнений (4), приведенной в работе. J. Wolska.

6298. Об устойчивости краевой задачи Римана. Ч и к и н Л. А., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 1, 44—46

Рассмотрен вопрос об устойчивости решения краевой задачи Римана для одной пары аналитических функций при деформации контура. При этом допускаются только такие деформации контура, которые в своей совокупности удовлетворяют условиям Варшавского (Warchawsky St., Math. Z., 1932, 35).

Основной результат, полученный автором, состоит в следующем: Если L_0 — простой гладкий замкнутый контур и функция G (t) (коэффициент в краевом условии) удовлетворяет условию Гёльдера и нигде на L_0 не обращается в нуль, то решение однородной задачи Римана устойчиво.

Доказательство опирается на теорему Каратеодори о конформном отображении областей с переменными границами и на теорему Варшавского. Аналогичные условия являются достаточными для устойчивости решения неоднородной задачи Римана. А. В. Батырев

6299. Обобщенная задача кручения для двусвязной многоугольной области. Бабакова О. И., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 4, 450—453

Пусть D — одно- или многосвязная область, граница которой образована дугами L_i. На каждой дуге L_i задан многочлен $P_i(x, y)$, причем если L_i и L_j имеют общую точку, то в этой точке $P_i(x, y) = P_j(x, y)$. Требуется найти регулярную и непрерывную вплоть до границы в D аналитическую функцию $F(z)$, удовлетворяющую условию:

$$\operatorname{Im} F(z) \equiv \psi(x, y) = P_i(x, y) + C$$

на дуге L_i, причем разным компонентам границы соответствуют, вообще говоря, разные значения постоянной C. Для односвязной многоугольной области D эту задачу решил П. П. Куфарев (Прикл. матем. и механика, 1937, 1, вып. 1). В реферируемой заметке автор решает эту же задачу для двусвязной многоугольной области при помощи вспомогательного конформного отображения области D на круговое кольцо

$$0 < h < |w| < 1.$$

Окончательная формула имеет вид

$$\frac{d^\mu F(z)}{dz^\mu} = A \int \frac{P(w)}{S(w)} \frac{dw}{w^2} + B, \qquad (1)$$

где μ — наибольшая из степеней многочленов $P_i(x, y)$, A и B — комплексные постоянные,

$$P(w) = \prod_{k=1}^{N} \vartheta_1^{l_k}\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{w}{w_k'}\right),$$

$$S(w) = \prod_{k=1}^{n} \vartheta_1^{\mu a_k}\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{w}{w_k}\right).$$

Здесь $\vartheta_1(\zeta)$ — тэта-функция Якоби, l_k, a_k — неотрицательные целые числа, $\sum_{k=1}^{N} l_k = \mu n$, w_k — точки, соответствующие вершинам многоугольной области D при отображении на кольцо, w_k' — некоторые попарно различные внутренние точки кольца. Предельным переходом при $h \to 0$ из (1) получается формула П. П. Куфарева; при $\mu = 2$ получается формула для второй производной от комплексной функции кручения в обыкновенной задаче кручения. Автор рассматривает отдельно тот случай, когда все стороны границы области D параллельны осям координат, в частности, когда область D ограничена двумя правильными замкнутыми четырехсторонниками. В работе используется методика Н. И. Ахиезера (Аеродинамічні досліди, ВУАН, Київ, 1928). В. А. Зморович

6300. О вычислении значений голоморфных функций одной комплексной переменной. Пиконе (Sul calcolo delle funzioni olomorfe di una variabile complessa. Mauro Picone), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 118—126 (итал.)

Пусть D — плоская область, ограниченная конечной совокупностью C простых спрямляемых замкнутых или разомкнутых кривых и гладкой разомкнутой кривой Γ, которая удовлетворяет некоторым дополнительным условиям; функция $f(z)$ ограничена и представима интегралом Коши в D.

В работе выведены формулы, которые дают возможность вычислить значение функции $f(z)$ и ее производных в любой точке области D, если известны граничные значения $f(z)$ лишь на C. Автору неизвестны аналогичные результаты, принадлежащие Карлеману (Carleman T., Fonctions quasi analytiques, Paris, 1926, 3—7), Г. М. Голузину и В. И. Крылову (Матем. сб., 1933, 40, № 2, 144—149) и Дзину (РЖМат, 1954, 2089). Б. В. Хведелидзе

6301. Граничные значения непрерывных аналитических функций. Рудин (Boundary values of continuous analytic functions. Rudin Walter), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 808—811 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть φ — непрерывная комплекснозначная функция, определенная на замкнутом подмножестве E точек единичной окружности C, $mE = 0$. Тогда существует функция f, аналитическая внутри $|z| < 1$ и непрерывная в $|z| \leqslant 1$ такая, что $f(\zeta) = \varphi(\zeta)$ для всех $\zeta \in E$. При этом функция $f(z)$ может быть построена так, что $f(K) \subset T$, где $K = |z| < 1$, а T — какая-либо жорданова область, содержащая $\varphi(E)$.

Эта теорема является усилением известного результата Фату о существовании аналитической в $|z| < 1$ функции, непрерывной в $|z| \leqslant 1$, граничные аначения которой обращаются в 0 на заранее заданном замкнутом множестве $E \subset C$, $mE = 0$ (см., например Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., 1950, гл. IV, § 3). При доказательстве своей теоремы автор использует в качестве аппарата функции, построенные впервые Фату. В заключение автор останавливается на применении доказанной теоремы к изучению свойств алгебр с максимальным модулем. Такие алгебры рассматривались автором ранее (РЖМат, 1954, 5541). Показывается, что фигурирующее в условиях теоремы 1 из цитированного реферата требование, чтобы алгебра содержала унивалентную функцию, не может быть опущено из условий теоремы. Г. Ц. Тумаркин

6302. О представлении аналитической функции в виде интеграла Лапласа. Вейтс (On the representation of an analytic function by a Laplace-integral. Wuyts P.), Nieuw arch. wiskunde, 1956, 4, № 2, 71—80 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть функция $f(s)$ комплексного переменного $s = x + iy$ удовлетворяет условиям: а) $f(s)$ голоморфна в некоторой полуплоскости $x > \lambda$; б) при любом $\mu > \lambda$ имеют место сходимость интеграла

$$I = \lim_{\omega \to \infty} \int_{\mu - \omega i}^{\mu + \omega i} \frac{|f(z)|\,|dz|}{1 + |z|}$$

и равномерная сходимость интеграла

$$F(t) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - \omega i}^{\mu + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz$$

во всяком конечном промежутке $0 < T' \leqslant t \leqslant T''$; в) $f(s) = O(|y|)$ при $|y| \to \infty$ равномерно в полуплоскости $x \geqslant \mu$; г) $\lim f(s) = 0$ в угловой области

$$|\arg(s - \mu)| \leqslant \psi < \frac{\pi}{2}, \quad |s| \to \infty$$

Тогда $f(s)$ является изображением Лапласа функции $F(t)$, т. е. в полуплоскости $x > \mu$ имеет место равенство

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = L\{F\}.$$

Ю. Л. Рабинович

6303. Принцип симметрии и распределение значений функций, определенных в круге. Ловатер (The reflection principle and the distribution of values of functions defined in a circle. Lohwater A. J.), Suomalais. tiedeakat. toimituks. Sar. A-1, 1956, № 229, 17 pp.) (англ.)

Рассматриваются функции $f(z)$, удовлетворяющие одному из следующих условий:

I. $f(z)$ — аналитична и ограничена в $|z|<1$, $|f(z)|<1$ и радиальные граничные значения $f(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ таковы, что почти всюду на дуге A $|f(e^{i\theta})|=1$.

II. То же самое, что и в условии I, но теперь A совпадает с $|z|=1$.

III. $f(z)$ мероморфна в $|z|<1$ и $\lim_{r\to 1}|f(re^{i\theta})|=1$ почти всюду на дуге A.

Изучаются условия, при выполнении которых функция $f(z)$ может быть продолжена по принципу симметрии через дугу A, а также исследуется распределение значений функций $f(z)$ рассматриваемых классов вблизи тех точек A, которые являются для $f(z)$ особыми. Подобные вопросы разбирались ранее в работах Р. Неванлинна (Nevanlinna R., Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1929, 32, № 7, 1—75), Сейделя (Seidel W., Trans. Amer. Math. Soc., 1933, 34, 1—21), Каратеодори (Caratheodory C., Commun. math. helv., 1946, 19, 263—278) и др. Предыдущие результаты автора в этом направлении см. РЖМат 1954, 2568; 1956, 1278, 4445. В реферируемой работе изложение как ранее известных результатов, так и их дальнейших обобщений проводится методом, не основывающимся на представлении гармонических функций интегралом Пуассона—Стилтьеса, как это обычно делалось ранее. Это позволяет, как указывает автор, сделать перенесение полученных результатов на более широкие классы функций, например на псевдоаналитические. Метод, применяемый автором, при рассмотрении функций, удовлетворяющих условию I или II, состоит в изучении свойств компонент $G_{n,k}$ открытых множеств $H_n\left\{z \,\middle|\, |z|<1;\ |f(z)|<\frac{1}{n}\right\}$. Так, в лемме 1 показывается, что если для $f(z)\not\equiv\text{const}$ выполняется условие II и $f(z)\neq 0$ при $|z|<1$, то для любого $n\geqslant 2$ граница $\gamma_{n,k}$ области $G_{n,k}$ будет жордановой кривой, причем пересечение $\gamma_{n,k}\cap|z|=1$ — непустое множество меры нуль. В лемме 2 доказывается, что при выполнении условий леммы 1 каждая компонента $G_{n,k}$, $k=1, 2, \ldots$ содержит по крайней мере одну компоненту H_{n+1}. Приведем некоторые теоремы, установленные в работе: Теорема 5. Если $w=f(z)$ удовлетворяет условию I и p — особая точка $f(z)$, $p\in A$, то все значения w, $|w|<1$, за исключением, быть может, множества емкости нуль, принимаются функцией $f(z)$ как угодно близко от p.

Для случая, когда $f(z)$ удовлетворяет условию II, теорема 5 была ранее доказана Оцука (Ohtsuka, J. Math. Soc. Japan, 1950, 1, 1—15).

В теореме 6 автор показывает, что при добавочном предположении о том, что множество особых точек $f(z)$ на дуге A имеет логарифмическую емкость нуль, заключение теоремы 5 можно усилить. Теперь уже все значения w, $|w|<1$, за одним лишь возможным исключением, будут приниматься $f(z)$ в любой сколь угодно малой окрестности p.

Теорема 9. Если $f(z)$ мероморфна в $|z|<1$, $\lim_{r\to 1}|f(re^{i\theta})|=1$ почти всюду на $|z|=1$ и $f(z)\neq\alpha$, $|\alpha|<1$, тогда либо α — асимптотическое значение для $f(z)$, либо $|f(z)|\geqslant 1$ в $|z|<1$.

Теорема 9 является дальнейшим развитием одного результата, полученного автором ранее (Duke Math. J., 1952, 19, 243—252).

Теорема 10. Если $f(z)$ удовлетворяет условию III и $p\in A$ — особая точка $f(z)$, то множество $R(p)$ тех значений, каждое из которых принимается функцией $f(z)$ в любой окрестности p, содержит одно из следующих множеств $M:|w|<1$, $N:|w|>1$ или $M\cup N$, за возможным исключением множества емкости нуль.

Теорема 10 обобщает результат Каратеодори (см. предыдущую ссылку). Г. Ц. Тумаркин

6304. О степенных рядах с неограниченными множествами предельных значений и функциях класса H_2 с тощими множествами радиальной непрерывности. Багемил (On power series with unbounded cluster sets, and functions of class H_2 with meager sets of radial continuity. Bagemihl F.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 10, 763—765 (англ.)

Через $C(f(z), e^{i\theta})$ обозначается множество всех предельных значений в точке $e^{i\theta}$ аналитической в круге $D:|z|<1$ функции $f(z)$. Доказывается, что для некоторых классов аналитических в D функций $f(z)$, как правило (в смысле категории по Бэру), множества $C(f(z), e^{i\theta})$ будут неограниченными ($\infty\in C(f(z), e^{i\theta})$, при всех $e^{i\theta}\in K$, где $K=|z|=1$. Соответствующий результат устанавливается в следующей теореме, метод доказательства которой, как отмечает автор, представляет из себя модификацию рассуждений, применявшихся ранее Рыль-Нардзевским и Штейнхаусом (Ryll-Nardzewski C., Steinhaus H., Studia math., 1951, 12, 159—165).

Теорема. Пусть для каждого x из некоторого Банаховского пространства X $f(x, z)$ будет аналитической функцией от $z\in D$, причем для каждого $z\in D$ $f(x, z)$ будет линейным функционалом от $x\in X$. Тогда найдется открытое множество $G\subset K$ и множество $Q\subset X$ типа F_σ первой категории такие, что для каждого $x\in X$ $C(f(z), e^{i\theta})$ будет ограничено при всех $e^{i\theta}\in G$, а для каждого $x\in X-Q$ множество $C(f(z), e^{i\theta})$ будет неограниченным для всех $e^{i\theta}\in K-G$.

Если, кроме того, каждому $e^{i\theta}\in K$ соответствует $x_\theta\in X$ такое, что $C(f(x_\theta, z), e^{i\theta})$ будет неограничено, то для каждого $x\in X-Q$ множество $C(f(x, z), e^{i\theta})$ будет неограничено для каждого $e^{i\theta}\in K$.

Используя один результат Коллингвуда (РЖМат, 1955, 5738 с поправкой в РЖМат, 1956 № 2; РЖМат, 1956, 368), автор в качестве приложений доказанной теоремы приводит следующее предложение.

Следствие 2. Существует подмножество класса H_2 второй категории такое, что каждая функция $f(z)$ из этого подкласса будет иметь конечные радиальные значения только на множестве первой категории точек из K.

Результат, установленный в следствии 2, полезно сопоставить с хорошо известным фактором существования у всякой функции $f(z)\in H_2$ конечных радиальных значений почти всюду на K (см., например, Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., 1950 гл. II).

Г. Ц. Тумаркин

6305. Асимптотические места целых и мероморфных функций. Хейнс (Asymptotic spots of entire and meromorphic functions. Heins Maurice), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 11, 883—885 (англ.)

В первой части статьи рассматривается обобщение теоремы Данжуа—Карлемана—Альфорса (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, 1941, гл. XI, § 4). Пусть $f(z)$ мероморфна в $z\neq\infty$. Пусть σ — асимптотическое место над w_0 (РЖМат, 1956, 8008, а также реф. 6316), Ω — односвязная жорданова область, содержащая w_0, $\sigma(\Omega)$ — прообраз

окрестности σ, лежащей над Ω, в z-плоскости; $u(\sigma(\Omega)) \geqslant 0$ — наибольшая гармоническая миноранта в $\sigma(\Omega)$ функции $G(f(z), w_0)$, где $G(w, w_0)$ — функция Грина в области Ω. Паре (σ, Ω) ставим в соответствие индекс $\nu(\sigma, \Omega)$ следующим образом: $\nu(\sigma, \Omega) = 0$, если $u(\sigma(\Omega)) \equiv 0$; $\nu(\sigma, \Omega) = n < \infty$, если $u(\sigma(\Omega))$ представляется в виде линейной комбинации n линейно независимых гармонических функций в $\sigma(\Omega)$; $\nu(\sigma, \Omega) = \infty$ в остальных случаях. Назовем гармоническим индексом σ $h(\sigma) = \min \nu(\sigma, \Omega)$, где минимум берется по всем Ω.

Указано, что понятие ас. места с положительным индексом совпадает с понятием K-точки, введенным референтом в связи с обобщением теоремы Данжуа—Карлемана—Альфорса (РЖМат, 1955, 3725). Используя понятие гармонического индекса, указанное обобщение можно усилить. Обозначим H сумму гармонических индексов всех ас. мест σ; из результата Кьельберга (Kjellberg, Arkiv. mat., 1951, 1, № 25, 347—351) следует $H \geqslant n$, если имеется n ас. мест с положительными индексами. Доказана теорема 1: Если $H = +\infty$, то $f(z)$ бесконечного порядка; если $2 \leqslant H < +\infty$, то $f(z)$ не ниже среднего типа порядка $H/2$. Это же справедливо для $H = 1$ при обычных для этого случая ограничениях геометрического характера.

Далее показано, что в случае целой функции учет величины гармонических индексов для ас. мест над конечными точками не дает усиления теоремы Данжуа—Карлемана—Альфорса по сравнению с рассмотрением K-точек, для σ над ∞ усиление может быть существенным (например, для $w = z \sin z$ $h(\infty) = 2$).

Во второй части статьи рассматриваются прямо критические особые точки, которые автор называет локально выпускаемыми значениями. Показано, что мероморфная функция параболического типа имеет не более счетного множества прямо критических точек, а также, что в прообразе бесконечнолистной окрестности, лежащей над областью Ω на римановой поверхности параболического типа, $f(z)$ принимает все значения из Ω бесконечное число раз, за возможным исключением двух. Относительно этих последних теорем автор высказывает предположение, что они, возможно, были доказаны ранее, но ему эти результаты не были известны. Действительно, эти последние результаты не новы (обзор см. РЖМат, 1956, 3769). А. А. Гольдберг

6306. О функциях, мероморфных в единичном круге. Клуни (On functions meromorphic in the unit circle. Clunie J.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 65—67 (англ.)

Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z| < 1$ и принимает в этом круге 0, 1, ∞ не более N раз, а в круге $|z| < \delta$ совсем не принимает эти значения, $f'(0) \neq 0$. Тогда для всякого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что

$$(1 - \varepsilon) T(1/2, f) < N \ln(e/\delta) + \overset{+}{\ln} |1/f'(0)| + 3 \overset{+}{\ln} |f(0)| + c,$$

где $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика. Валирон (Valiron G., Acta math., 1929, 52, 67—92) доказал это неравенство с худшими множителями перед логарифмами. А. А. Гольдберг

6307. О некоторых периодических характеристических функциях. Лукач (On certain periodic characteristic functions. Lukacs Eugene), Compositio math., 1956, 13, № 1, 76—80 (англ.)

Пусть $F(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ — функция распределения и

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x)$$

— соответствующая характеристическая функция. В работе доказаны следующие теоремы:

1. Однозначная и периодическая аналитическая характеристическая функция (характеристическая функция называется аналитической, если она совпадает в некоторой окрестности начала с аналитической функцией) имеет либо действительный, либо чисто мнимый период. Период действителен в том и только в том случае, если характеристическая функция решетчата (т. е. функция распределения чисто разрывна и имеет скачки в точках арифметической прогрессии).

2. Целая периодическая характеристическая функция (не равная тождественно 1), есть характеристическая функция решетчатого распределения (т. е. не может иметь чисто мнимого периода). Б. М. Левитан

6308. О разложении резидуальной функции в ряды некоторых специальных видов. Мансур-Ахмад (On the expansion of a residual function as series of certain special forms. Mansoor Ahmad), Ann. Math., 1956, 63, № 3, 549—564 (англ.)

Функция $P(x)$ называется резидуальной, если: 1) Функция $P(e^{-z})$ для $-\infty < z < \infty$ определена и дифференцируема за исключением, быть может, конечного числа полюсов и существенных особенностей;

2) При $x \to \infty$ $P(x) = 0(x^{\gamma})$ для некоторого $\gamma > 0$, так что для комплексных $s = \sigma + it$ определены функции

$$\chi_r(s) = \int_0^{\infty} e^{-sz} \{P(e^{-z}) - p(z)\} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} e^{sz} p(z) dz, \qquad (\sigma > 0),$$

$$\chi_e(s) = \int_0^{\infty} e^{sz} \{P(e^{z}) - p(-z)\} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} e^{-sz} p(-z) dz, \qquad (\sigma < 0),$$

где $p(z)$ — сумма главных частей $P(e^{-z})$ в интервале $-\infty < z < \infty$; Δ — замкнутый контур, содержащий все особенности $P(e^{-z})$ и $P(e^{z})$ в интервале $-\infty < z < \infty$.

3) Эти две функции удовлетворяют соотношению

$$\chi_r(s) = -\chi_e(s)$$

в области D, которая лежит вне ограниченного замкнутого множества S.

Пусть

$$\chi_0(s) = \begin{cases} \chi_r(s) & (\sigma > 0), \\ \chi_e(s) & (\sigma < 0). \end{cases}$$

Если

$$\lim_{|t| \to \infty} \chi_0(\sigma + it) = 0$$

равномерно в каждом конечном интервале $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, то $P(x)$ называется резидуальной в обычном смысле.

В работе указываются различные условия резидуальности и обычной резидуальности функций. Например, если функция $P(e^{-z})$ определена и дифференцируема для $-\infty < z < \infty$ за исключением, быть может, изолированной существенной особенности в начале, то для того чтобы $P(x)$ была резидуальна, необхо-

димо и достаточно, чтобы имело место разложение

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n i^{n+\alpha} n!\,\nu_{n,\alpha}\left(\ln\frac{1}{x}\right)}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} I_{n+\alpha}\left(i\ln\frac{1}{x}\right),$$

где α — неотрицательное целое число и

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}<\infty,\qquad \limsup_{n\to\infty}|b_n|^{1/n}<\infty.$$

Б. М. Левитан

6309. Качественная характеристика произведений Бляшке в полуплоскости. Акутович (A qualitative characterization of Blaschke products in a half-plane. Akutowicz Edwin J.), Amer. J. Math., 1956, 78, № 4, 677—684 (англ.)

Пусть $\{a_\nu\}$ — последовательность комплексных чисел с $\operatorname{Im} a_\nu>0$ для всех ν и такая, что $\sum_{\nu=0}^{\infty}\operatorname{Im} a_\nu/(1+|a_\nu|^2)<\infty$. Тогда известно, что произведение Бляшке $b(z)$

$$b(z)=[(z-i)/(z+i)]^n\prod_{\nu=1}^{\infty}[|a_\nu-i|/(a_\nu-i)]\times$$

$$\times[|a_\nu+i|/(a_\nu+i)]\,[(z-a_\nu)/(z-\bar a_\nu)]$$

будет равномерно сходиться на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant a$, где a — любое число >0, причем $|b(x+iy)|<1$ для $y>0$ и $|b(x+iy)|\to 1$ при $y\to 1$ для почти всех x, $-\infty<x<\infty$.

Автор доказывает в теореме 1, что

$$\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|b(x+iy)|\,dx}{1+x^2}\to 0\ \text{при}\ y\to 0+ \qquad (1).$$

В теореме 2 показывается, что если для голоморфной в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ функции $F(z)$, для которой $|F(z)|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, имеет место условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|F(x+iy)|\,dx}{1+x^2}\to 0\ \text{при}\ y\to 0+,$$

то $F(z)=e^{ikz+ic}b(z)$, где k и c — действительные числа, $k\geqslant 0$, и $b(z)$ — произведение Бляшке, составленное по нулям $F(z)$.

Аналогичные результаты для произведений Бляшке в круге хорошо известны (см., например, Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2, М.—Л., 1950). Некоторые свойства произведений Бляшке в полуплоскости были установлены ранее В. И. Крыловым (Матем. сб., 1939, 6 (48), 113—116).

Заметим также, что теорему 2 автора можно сразу получить из установленного Р. Неванлинна представления для голоморфных в полуплоскости функций некоторых классов (см., например., Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956, стр. 311).

Г. Ц. Тумаркин

6310. Исключительные значения целых функций. Сингх (Exceptional values of entire functions. Singh S. K.), Duke Math. J., 1956, 23, № 4, 527—531 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ, $L(r)$ — произвольная непрерывная медленно растущая функция, т. е. $L(cr)\sim L(r)$ для любого фиксированного $c>0$. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Если $\overline{\lim}\ln M(r,f)/r^\rho L(r)=a$ $(0\leqslant a\leqslant\infty)$, то $\overline{\lim}\,n(r,x)/r^\rho L(r)\geqslant a(\lambda-1)(\lambda+1)^{-1}\rho 2^{-1\lambda-\rho}$ при $r\to\infty$, исключая, возможно, одно значение x. Здесь $\lambda=(1+\sqrt{1+\rho^2})/\rho$.

Теорема 2. Если $T(r,f)\sim r^\rho L(r)$ и $n(r,x_1)=o(r^\rho L(r))$, то $n(r,x)/r^\rho L(r)\to\rho$ для всех $x\neq x_1$, $T(r,f)$ — неванлинновская характеристическая функция.

Теорема 3. Если $n(r,x)/r^\rho L(r)\to 0$ для двух значений x, то это же имеет место для всех x.

А. А. Гольдберг

6311. Об одном пространстве целых функций. IV. Ийер (On the space of integral functions. IV. Iyer V. Ganapathy), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 644—649 (англ.)

В предыдущих статьях автора (J. Indian Math. Soc., 1948, 12, 13—30; Quart. J. Math., 1950, 1, 86—96; Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 874—883) было определено пространство Γ целых функций $\alpha=\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, в котором норма задается условием: $|\alpha|=\max(|a_0|,\sqrt[n]{|a_n|},\ n\geqslant 1)$, и доказана полнота, равносильность сходимости по норме равномерной сходимости в круге любого радиуса и справедливость теоремы Банаха—Хана о продолжении линейного функционала.

В реферируемой работе рассматривается ряд новых вопросов. Доказывается теорема: Всякое линейное изометрическое преобразование Γ в себя (т. е. такое, что $|T(\alpha)|=|\alpha|$, $\alpha\in\Gamma$) может быть только следующих двух типов: или $T(\delta_n)=k_n\delta_n$, $\delta_n\equiv z^n$, $n\geqslant 0$, $T(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}k_na_n\delta_n$, или $T(\delta_0)=k_0\delta_1$, $T(\delta_1)=k_1\delta_0$ $T(\delta_n)=k_n\delta_n$, $n\geqslant 2$, $T(\alpha)=k_0a_0\delta_1+k_1a_1\delta_0+\sum_{n=2}^{\infty}k_na_n\delta_n$, где k_n — комплексное число с модулем 1. Отсюда следует, что всякое изометрическое преобразование Γ в себя взаимно однозначное. Автор отмечает, что подобное обстоятельство не всегда имеет место, например, в пространстве ограниченных последовательностей $x(x_1,x_2,\ldots)$, $|x|=\sup|x_n|$, преобразование $T(x)=x'=(0,x_1,x_2,\ldots)$ изометрично, но отображает все пространство в его правильную часть. Далее автор устанавливает необходимое условие, чтобы преобразование было ограниченным, т. е. чтобы выполнялось условие $|T(\alpha)|\leqslant K|\alpha|$, $K=\text{const}$: если преобразование ограниченное, то $T(\delta_0)=a_{00}\delta_0+a_{01}\delta_1$, $T(\delta_1)=a_{10}\delta_0+a_{11}\delta_1$, $T(\delta_n)=k_n\delta_n$, $n\geqslant 2$, где $|a_{ij}|\leqslant K$, $i,j=0,1$, $|k_n|\leqslant K^n$, $n\geqslant 2$. Наконец, автор двумя способами в пространстве Γ определяет произведение элементов, во-первых, полагает $\alpha\beta=\alpha(z)\beta(z)$, во-вторых, принимает $\alpha\circ\beta=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n\delta_n$, если $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\delta_n$, $\beta=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\delta_n$; пространство с умножением по первому способу называет $\Gamma(N)$, по второму — $\Gamma(C)$.

Ранее доказанную теорему о том, что гомоморфизм $\Gamma(N)$ в себя обязательно имеет форму $T(\alpha)=\alpha[\beta(z)]$, где $T(\delta_1)=\beta=\beta(z)$, автор дополняет замечанием, что отображение взаимно однозначно только в случае $\beta(z)=az+b$, где a, b — комплексные числа, $a\neq 0$. Относительно общего вида гомоморфизма $\Gamma(C)$ в себя доказывается, что всякому такому преобразованию можно поставить в соответствие единственным способом последовательность H_n, $n=0,1,\ldots$ конечных подмножеств ряда $0,1,2\ldots$ со свойствами: H_n и H_m, $n\neq m$, не имеют общих элементов; отдельные H_n, возможно, пусты; $p_n=O(n)$, где p_n — наибольшее

число в H_n. При этом гомоморфизм $\Gamma(C)$ в себя определяется условиями: $T(\delta_n) = \sum_{p \in H_n} \delta_n$, $T(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T(\delta_n)$. Обратно, всякая $\{H_n\}$ с указанными свойствами определяет гомоморфизм $\Gamma(C)$ в себя. Отображение взаимно однозначно тогда и только тогда, когда среди H_n нет пустого подмножества. Если же ни одно H_n не пусто и не только $p_n = O(n)$, но и $n = O(p_n)$, то всякое замкнутое множество элементов $\Gamma(C)$ преобразуется в замкнутое. В заключение автор рассматривает совокупность таких перестановок последовательности $0, 1, 2 \ldots$, что если n переходит в $\theta(n)$, то $\theta(n) = O(n)$ и $n = O(\theta(n))$, и доказывает, что группа таких перестановок изоморфна группе взаимно однозначных и непрерывных отображений $\Gamma(C)$ в себя. М. Г. Хапланов

6312. Некоторые неравенства для функций экспоненциального типа. Хёрмандер (Some inequalities for functions of exponential type. Hörmander Lars), Math. scand., 1953, **3**, № 1, 21—27 (англ.)

Целая функция $f(z)$ называется функцией экспоненциального типа σ, если существует константа C такая, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$|f(z)| < Ce^{(\sigma+\varepsilon)|z|}.$$

R_σ есть класс функций экспоненциального типа σ таких, что $f(x)$ вещественна и $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для вещественных x. В работе доказаны теоремы:

1. Пусть $f \in R_\sigma$ и пусть $F_\sigma(x; \alpha) = \cos(\sigma^2 x^2 + \alpha^2)^{1/2} (\alpha > 0)$. Тогда $f - F_\sigma$ либо обращается в нуль тождественно, либо имеет нуль в каждом интервале вещественной прямой, в котором F_σ изменяется от -1 до $+1$ и, сверх этого, не более $2k$ нулей, где k — наименьшее целое число $\geqslant \alpha/\pi$.

2. Если $f \in R_\sigma$, то для любого вещественного $t \neq 0$

$$f(it) = \cos(a + bi), \qquad (1)$$

с вещественными a и b и $|b| \leqslant \sigma |t|$. Если $|b| = \sigma|t|$, то $f(x) = \cos(bt^{-1}x + a)$. Если $|b| < \sigma|t|$, то существуют различные $f \in R_\sigma$, для которых выполняется равенство (1).

3. Пусть $f \in R_\sigma$, $f(it) = \cos(a + ib)$, $t \neq 0$, $b^2 < \sigma^2 t^2$. Обозначим: $A_\nu^2(x) = \sigma^2 x^2 + 2x(a + 2\nu\pi) b/t + \sigma^2 t^2 - b^2 + (a + 2\nu\pi)^2$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); I_ν — интервалы, в которых $A_\nu(x) \leqslant \pi$. Тогда либо $f(x) \equiv \cos A_\nu(x)$, либо $f(x) > \cos A_\nu(x)$ на I_ν. Интервалы I_ν разделены. Если x не принадлежит ни одному I_ν, то существуют различные $f \in R_\sigma$, для которых выполняется (1) и $f(x) = -1$. 4. Если

$$f \in R_\sigma, \quad f(0) = \cos c, \quad 0 < c \leqslant \pi, \quad \sigma^2(u^2 + v^2) < c^2 \quad (2),$$

то $f(u + iv) \neq 1$. Если $u + iv$ лежит вне круга (2), то $f(u + iv) = 1$ для некоторых $f \in R_\sigma$, причем $f(0) = \sin c$.

Аналогичные результаты для тригонометрических многочленов получены Хюльтон—Каваллиусом (РЖМат, 1957, 5498). Частный случай теоремы 1, соответствующий $\alpha = 0$, принадлежит Даффину и Шефферу (Duffin R. J., Schaeffer A. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1938, **44**, 236—240). Доказательство теоремы 1 опирается на аппроксимационную теорему референта (Докл. АН СССР, 1937, **15**, 169—172), для которой дается новое доказательство. Аналогичное доказательство было предложено Н. И. Ахиезером и В. А. Марченко (РЖМат, 1955, 4346). Б. М. Левитан

6313. Приложения линейных нормированных пространств к экстремальным проблемам теории функций. Шапиро (Applications of normed linear spaces to function-theoretic extremal problems. Shapiro Harold S.), Lect. Funct. Complex Variable. Ann Arbor, Univ., Michigan Press, 1955, 399—404 (англ.)

Краткое изложение результатов, главные из которых ранее опубликованы автором в совместной с Рогозинским работе (РЖМат, 1955, 166).

Примечание референта. Подобные же результаты, а также аналогичные результаты при значительно более общих предположениях были несколько ранее получены С. Я. Хавинсоном (РЖМат, 1956, 4442, где имеются ссылки на предыдущие работы (РЖМат, 1956, 8735)), о чем не указывает автор реферируемой статьи. Г. Ц. Тумаркин

6314. Принцип Кельвина и некоторые неравенства теории функций. I. Кубо (Kelvin principle and some inequalities in the theory of functions. I. Kubo Tadao), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, **A28**, № 3, 299—311 (англ.)

Нехари (РЖМат, 1956, 5203), опираясь на принцип Дирихле, установил ряд неравенств для класса гармонических функций с постоянными граничными значениями. Автор, используя принцип Кельвина, строит подобную теорию для другого класса гармонических функций, имеющих нормальную производную, равную 0 на границе некоторой области.

Пусть D_i — область на некоторой замкнутой римановой поверхности конечного рода с границей C_i, состоящей из конечного числа аналитических кривых.

Пусть S — действительная функция, гармоническая в D_1, за исключением конечного числа особых точек.

Теорема I. Если 1) $D_2 \subset D_1 \subset R$; 2) $D_1 - D_2$ не содержит особых точек S; 3) функция $p_i + S$ гармоническая в D_i ($i = 1, 2$); 4) $\partial p_i/\partial n = 0$ на C_i ($i = 1, 2$),

тогда $\int_{C_2} p_2 \frac{\partial S}{\partial n} ds \geqslant \int_{C_1} p_1 \frac{\partial S}{\partial n} ds$,

где производные берутся по внешним нормалям. Доказательство основано на принципе Кельвина (см., например, Milne, Thompson, Theoretical hydrodynamics, London, 1938). Аналогичная теорема для гармонических функций с тремя переменными дана Курантом и Гильбертом (Курант, Гильберт, Методы математической физики, М. Л., Гостехиздат, 1951, **1**, 230). Взяв в качестве p_i и S подходящие функции, автор выводит ряд неравенств, большинство из которых хорошо известны, но доказываемых ранее с помощью различных методов. По-видимому, новым является установленное в работе неравенство для ядровых функций Бергмана (Bergman S., The kernel function and conformal mapping, New York Math. Survey, 1950, № 5) и следующий результат:

Теорема II. Предположим, что: 1) аналитическая функция $Q(D, z)$ дает конформное отображение ограниченной области D на всю плоскость, с разрезами вдоль сегментов радиусов, выходящих из 0; 2) $Q(D, \zeta) = 0$ ($\zeta \in D$); 3) для некоторого $\eta \in D$ имеем

$$Q(D, z) = (z - \eta)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - \eta)^k.$$

Если $D_2 \subset D_1$, тогда

$$|Q'(D_2, \zeta)| \subseteq |Q'(D_1, \zeta)|.$$

Автор доказывает также два обобщения теоремы I, которые позволяют получить некоторые неравенства для функций, дающих конформное отображение многосвязных областей. K. Tatarkiewicz

6315. Об одном неравенстве для гиперболической меры и его приложениях в теории функций. И ё р-

генсен (On an inequality for the hyperbolic measure and its applications in the theory of functions. Jørgensen Vilhelm), Math. scand., 1956, 4, № 1, 113—124 (англ.)

В гиперболической области, т. е. области с более чем двумя граничными точками, можно ввести гиперболическую метрику $d\sigma$ (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, 1941, гл. III, § 3); обозначим $\lambda(z) = d\sigma_i / |dz|$ — отношение гиперболической длины элемента дуги к евклидовой его длине. Основным результатом статьи является теорема 1: Если гиперболическая область D в $z = x + iy$-плоскости содержит полуплоскость $y < 0$ и $z \in D \cap \{y > 0\}$, то $\lambda(z) \geqslant \lambda(\bar{z})$; равенство имеет место только тогда, когда граница D лежит на $y = 0$. Среди приложений этой теоремы отметим теорему 4: Пусть G — гиперболическая область и $z_1, z_2 \in G \setminus \infty$. Тогда для z, принадлежащих границе G,

$$\min(|z - z_1|/|z - z_2|)^2 \leqslant \lambda(z_2)/\lambda(z_1) \leqslant \max(|z - z_1|/|z - z_2|)^2,$$

равенства имеют место только тогда, когда $|z - z_1|/|z - z_2|$ принимает постоянное значение для z, принадлежащих границе G.

Приведены простые доказательства теоремы Ульмана (Ullman J. L., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 654—657) и Уолша (Walsh J. L., Amer. Math. Monthly, 1939, 46, 472—485), а также их обобщения.

А. А. Гольдберг

6316. **О принципе Линделёфа. Хейнс** (On the Lindelöf principle. Heins Maurice), Ann. Math., 1955, 61, № 3, 440—473 (англ.)

Развернутое изложение результатов автора, главные из которых были опубликованы ранее без доказательства (РЖМат, 1953, 1169; 1956, 8008). Пусть F и G — римановы поверхности с положительными границами, $\mathfrak{G}_F$ и $\mathfrak{G}_G$ — их функции Грина, $q = f(p)$ — конформное отображение (однозначное) F в G.

По классическому принципу Линделёфа в равенстве

$$\mathfrak{G}_G(f(p);\ q) = \sum_{f(r)=p} n(r)\,\mathfrak{G}_F(p, r) + u_q(p)$$

гармоническая функция $u_q(p)$ всегда $\geqslant 0$. Изучение этого «остаточного члена» является основной целью статьи.

Из результата Парро следует, что $u_q(p) = v_q(p) + w_q(p)$, где $v_q(p)$ — квазиограниченная, а $w_q(p)$ — сингулярная. Автор доказывает, что для всякого $q \in G$ имеем $v_q(p) > 0$ или $v_q(p) \equiv 0$.

В последнем случае f называют «типа Bl»; для такого f в работе устанавливается, что $w_q(p) \equiv 0$, кроме множества точек $q \in G$ емкости нуль.

Далее рассматриваются отображения типа Bl в q (РЖМат, 1953, 1169) и вводится класс отображений, называемых «локально типа Bl» — для отображений, которые будут типа Bl при любом $q \in G$. Это дает возможность говорить об отображениях f «локально типа Bl» и в том случае, когда F или G будут поверхностями с нулевыми границами. Отметим следующие результаты автора: Если $F \in O_{HB}$, где, как обычно, O_{HB} означает класс римановых поверхностей, на которых не существуют ограниченные гармонические функции $\not\equiv \mathrm{const}$, то всякое отображение f на F есть «локально типа Bl». В частности, это имеет место и для поверхностей F с нулевой границей. С другой стороны, доказывается, что всякое f, которое локально типа Bl, обладает свойством Иверсена (Iversen). Это обобщение ранее полученного результата референта (Stoïlow, Mathematica, 1943, 19, 126—138).

Другие теоремы касаются асимтотических точек, которые автор называет «метрическими» и которые образуют всегда множество F_σ емкости нуль, а также критериев, для того чтобы f было локально типа Bl.

S. Stoïlow

6317. **О классификации римановых поверхностей. Мори** (Riemann, 面の分類について。森明), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 1, 42—51 (японск.)

Финская школа, возглавляемая Р. Неванлинна, около 1940 г. начала заниматься теорией функций на открытых римановых поверхностях. Начали с проблемы существования, а затем перешли к проблеме выяснения структуры в целом некоторых классов функций. Естественно, что это привело к проблеме выявления системы конформных инвариантов эквивалентного класса римановых поверхностей. Именно с этой целью стал рассматриваться вопрос о существовании или не существовании на поверхности нетривиальных (т. е. не сводящихся к одним константам) классов функций G, HP, HB, HD, HDB, AB, AD, ABD, где G — функции Грина, H — гармонические функции, P — положительные, B — ограниченные, D — с конечным интегралом Дирихле, A — аналитические. Классы поверхностей, для которых не существуют (нетривиальные) соответствующие классы функций, обозначаются по Альфорсу следующими символами: O_G, O_{HP}, O_{HB}, O_{HD}, O_{HBD}, O_{AB}, O_{AD}, O_{ABD}. В статье дается обзор результатов о соотношениях включения для упомянутых восьми классов поверхностей.

Когда род поверхности является конечным, имеем (теорема 3 и §§ 6—7): $O_G = O_{HP} = O_{HB} = O_{HD} = O_{HBD} \subset O_{AB} \subset O_{AD} = O_{ABD}$, когда род является бесконечным, имеем (теорема 2, § 9, §§ 11—13):

$$\begin{array}{ccccccc} O_G & \subseteq & O_{HP} & \subseteq & O_{HB} \subset O_{HD} & = & O_{HBD} \\ & & & & \cap & & \cap \\ & & & & O_{AB} \subset & O_{AD} & \subseteq O_{ABD}, \end{array}$$

в которых $\subset$ обозначает собственное включение, в случае $\subseteq$ вопрос о собственном включении или знаке равенства ко времени написания работы еще не был решен.

В последних параграфах автор кратко касается граничных свойств и квазиконформного отображения (§ 14), рассматривает риманову поверхность как накрывающую поверхность над плоскостью z (§ 15), устанавливает некоторые достаточные условия для $R \in O_G$, O_{AB}, O_{AD} (§ 16) и заканчивает некоторыми дополнительными замечаниями (§ 17).

Автор не дает подробных доказательств; указываются только схема доказательства или источники.

6318. **Замечание об идеальной границе римановой поверхности. Мори, Ота** (A remark on the ideal boundary of a Riemann surface. Mori Shin'ichi, Ota Minoru), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 6, 409—411 (англ.)

В дополнение к предыдущей работе Ройдена (РЖМат, 1955, 3730) показывается, что гармонические функции $u \in HBD$ достигают максимума и минимума на гармонической границе Δ.

Г. Е. Шилов

6319. **Об автоморфных функциях с экспоненциальными множителями. Мюрберг** (Sur les fonctions automorphes à multiplicateurs exponentiels. Myrberg P. J.), J. math. pures et appl., 1956, 35, № 3, 261—275 (франц.)

Пусть G — фуксова группа, фундаментальные подстановки которой сводятся лишь к m гиперболическим подстановкам S_i и q эллиптическим T_j. Если $f(z) = g^*(z)/g(z)$ — соответствующая автоморфная функция,

где g и g^* — целые функции, то эти последние подчиняются условию: $g(S) = e^{u_S(z)} g(z)$, где $u_S(z)$ — целая функция. Ставятся две проблемы: I. Найти все целые функции $u(z)$, удовлетворяющие для всякого $S \in G$ условию

$$u(S) = \alpha_S u(z) + \beta_S.$$

II. Найти все целые функции $g(z)$, для которых $u_S(S) = \lambda_S u(z) + \eta_S$. Сначала доказывается, что

$$u(x) = \int W'(x)\, e^{I(x)} dx,$$

где $W(x)$ и $I(x)$ — абелевы интегралы соответственно 1-го и 3-го рода на римановой поверхности жанра p функции $u(z)$. Далее показывается, что

$$u(x) = \sum q_\nu u_\nu(x) + C,$$

где $u_\nu(x)$ — частные функции; коэффициенты же могут быть выбраны так, чтобы $2p + q$ примитивных периода функции $u(x)$ имели наперед заданные значения.

Далее вводятся вспомогательные функции $\varphi(x)$: если $g(x)$ имеет на римановой поверхности лишь один нуль, то пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{u'(x)} \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

В общем же случае $\varphi(x) = c_0 \varphi(x) + \sum_1^N c_\nu \varphi_\nu(x) + \sum_1^{\hat{N}} d_\mu \tilde{u}_\mu(x) + C$, где φ_ν и $\tilde{u}_\mu$ — интегралы соответственно 1-го и 2-го рода. Если положить

$$\varphi_\nu(x) = \int W'(x)\, e^{\Phi_\nu(x)} dx,$$

то $\Phi_\nu = \ln \dfrac{\varphi_\nu'(x)}{W'(x)}$ окажется интегралом 3-го рода. По функции $\varphi(x)$ строится функция

$$\psi(x) = \int \varphi(x)\, u'(x)\, dx,$$

обладающая тем свойством, что ее ветви на римановой поверхности связаны линейно, т. е. переходят в $\psi(x) + \lambda u(x) + \eta$. Путем подходящего выбора коэффициентов удается избавиться от η, и тогда $g(z, z_0) = e^{\psi(x)}$ оказывается регулярной в единичном круге с единственным нулем z_0 в фундаментальной области G, причем $g(S) = e^{\lambda_S(z) + \eta_S} g(z)$. Таким образом, функция $g(z)$ оказывается примитивной θ-автоморфной. Отсюда следует, что всякая автоморфная функция группы G может быть представлена в виде

$$f(z) = e^{w_0(z)} \prod_1^n \frac{g(z, b_\nu)}{g(z, a_\nu)}.$$

В заключение автор показывает, что в случае, когда G — группа нулевого жанра, автоморфная функция $x(z)$ может быть представлена, как комбинация фуксоидной функции и эллиптической. Библ. 8 назв., в том числе 5 работ автора. Г. П. Боев

6320. Научное сообщение Второму летнему институту. Многие комплексные переменные. Мартин, Чжэнь Шэн-шень, Зариский (Scientific report on the Second Summer Institute. Several complex variables. Martin W. T., Shiing-Shen Chern, Zariski Oscar), Bull. Amer. Math. Soc. ,1956, **62**, № 2, 79—141 (англ.)

Цикл обзорных докладов, прочитанных в Университете Колорадо (США) в июне—июле 1954 г. В составлении докладов принимали участие, кроме указанных выше основных авторов, Бергман, Бремерман и др. Статья содержит ряд результатов, которые не были опубликованы ко времени чтения докладов. Однако к моменту опубликования реферируемой статьи подавляющее большинство их уже опубликовано в других изданиях. В статье имеется подробная библиография, доведенная до момента ее опубликования.

Статья состоит из 3 частей. Часть 1 содержит результаты, относящиеся к кернфункции Бергмана и примыкающим к ней вопросам, к интегральному представлению Бергмана—Вейля, к плюрисубгармоническим функциям и их применению к харкатеристике областей голоморфности. Часть 2 посвящена комплексно-аналитическим многообразиям. В частности, приводятся результаты, относящиеся к расслоенным многообразиям различных видов, к голоморфно-полным многообразиям (иначе, многообразиям Штейна), к келеровым многообразиям, к однородным многообразиям. Указывается обобщение теоремы Римана—Роха на случай многих переменных, принадлежащее Гирцебруху. Часть 3 содержит изложение теории связок и ее приложений к алгебраической геометрии.

Следует отметить, что изложение авторов в ряде пунктов носит односторонний характер. Фундаментальную теорему К. Ока, содержащую решение обратной проблемы Гартогса—Леви, авторы называют леммой (стр. 91). Говоря об операторе, преобразующем функцию комплексного переменного в гармоническую функцию 3 переменных (стр. 95), авторы не указывают относящихся сюда результатов А. А. Темлякова В п. 1 (стр. 82) не указано, что свойства рассматриваемого там инварианта изучены референтом.

Следует также отметить, что даваемое авторами на стр. 89 определение плюрисубгармонической функции имеет пробел. Б. А. Фукс

6321. Одно из условий регулярности области. Хитоцумацу (正則領域のための一條件. 一松信), 數學, Сугаку, 1955, **7**, № 2, 99 (японск.)

В заметке доказывается следующее предложение: для того чтобы ограниченная однолистная область D была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) каждый связный компонент сечения области D аналитической гиперплоскостью $\{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = c\}$ является всегда комплексно-$(n-1)$-мерной аналитической областью; 2) первая проблема Кузена всегда разрешима. Ким Дзи Зен

6322. Об аналитических автоморфизмах обобщенных единичных кругов. Клинген (Über die analytischen Abbildungen verallgemeinerter Einheitskreise auf sich. Klingen Helmut), Math. Ann., 1956, **132**, № 2, 134—144 (нем.)

Исследуются группы аналитических автоморфизмов комплексных симметрических областей первого типа (по классификации Е. Картана). Эти области описываются следующим образом. Пусть Z — прямоугольная матрица из p строк и q столбцов, S_{pq} — совокупность всех Z, для которых выполняется неравенство

$$\overline{Z}'Z < E_q, \tag{1}$$

E_q — единичная матрица порядка q. Случай $p = q$ рассмотрен автором раньше (РЖМат, 1956, 3783). В настоящей статье рассматривается случай $p \neq q$ и доказывается, что каждое аналитическое отображение S_{pq} на себя имеет вид

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad A'\overline{A} - C'\overline{C} = E_p,$$
$$D'\overline{D} - B'\overline{B} = E_q \quad A'\overline{B} = C'\overline{D}. \tag{2}$$

Доказательство состоит из двух частей. В первой, теоретико-функциональной части доказывается (также как в известной статье Зигеля (Siegel, Amer. J. Math., 1943, 65, 1—86), что любой аналитический автоморфизм S_{pq}, оставляющий начало координат на месте, является линейным преобразованием. Во второй (алгебраической) части исследуется группа линейных преобразований S_{pq} в себя. И. И. Пятецкий

6323. О базисе в пространстве аналитических функций двух переменных. Еремин С. А., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 4, 361—376

Основные результаты статьи А. И. Маркушевича «О базисе в пространстве аналитических функций» (Матем. сб., 1945, **17(59)**, № 2) переносятся на пространство E_R функций двух переменных, аналитических в бицилиндре $\{|w|<R,\ |z|<R\}$, $0<R\leqslant\infty$. Доказывается, что E_R — полное пространство типа F, если ввести норму $\|f(w,\ z)\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{M_n}{1+M_n}$, где $M_n=\max\limits_{\substack{|w|\leqslant r_n,\\ |z|\leqslant r_n}}|f(w,z)|$, $r_n\to R$. Устанавливается общий вид линейного функционала $L(f)=\sum_{m,n=0}^{\infty}l_{m\,n}a_{m,\,n}$, если $f(w,z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{m,\,n}w^mz^n$, где $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}}\sqrt[m+n]{|l_{m,n}|}<R$. Система $\{f_n(w,z)\}$ называется усиленно линейно независимой (сокращенно: у. л. н.), если из $\lim\limits_{n\to\infty}(c_0^{(n)}f_0(z,w)+\ldots+c_n^{(n)}f_n(w,z))=0$ следует $\lim\limits_{n\to\infty}c_k^{(n)}=0$, $k=0,\ 1,\ldots$ Если $\{f_n(w,z)\}$ — полная у. л. н. система, то из $f(w,z)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_0^{(n)}f_0(w,z)+\ldots+c_n^{(n)}f_n(w,z))$ следует существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty}c_k^{(n)}=c_k=L_k(f)$, являющихся линейными функционалами в E_R.

Совокупность их, $L_k(f)$, $k=0,1,2,\ldots$, образует систему, биортогональную к системе $\{f_n(w,z)\}$. Система $\{L_k(f)\}$ обладает свойством единственности, если из $L_k(f)=0$, $k=0,1,\ldots$, следует $f(w,z)\equiv0$. Следуя А. И. Маркушевичу, вопрос о том, будет ли система $\{f_n(w,z)\}$ базисом, автор расчленяет на 4 пункта: является ли она (α) — полной, (β) — у. л. н., (γ) — обладает ли биортогональная система функционалов свойством единственности, (δ) — сходится ли для всякой функции $f(w,z)\in E_R$ ее разложение $\sum_{k=0}^{\infty}L_k(f)f_k(w,z)$. При выполнении условий (α), (β), (γ) система называется базисом в широком смысле. В этом случае каждой функции $f(w,z)\in E_R$ можно единственным способом поставить в соответствие ряд $f(w,z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}L_k(f)f_k(w,z)$, но он не обязательно сходится, а если сходится или имеет сходящуюся подпоследовательность частных сумм, то предельной функцией может быть только $f(w,z)$. Далее даются необходимые и достаточные условия выполнения каждого из пунктов (α), (β), (γ), (δ).

В то время как общие теоремы переносятся на функции двух переменных, в случае бицилиндрической области, без особого труда, перенос их для произвольной односвязной области в пространстве двух комплексных переменных (кроме указанного автором тривиального случая областей, псевдоконформно отображаемых на бицилиндр), по-видимому, представляет большие трудности. Непросто и получение конкретных примеров базисов и полных систем. Из имеющихся в работе А. И. Маркушевича функционалов порождающих полные системы, только два удается автору перенести на функции двух переменных: $\Lambda_n(\varphi)=\varphi(w_n,\ z_n)$ и $\Lambda_n(\varphi)=\varphi^{(n)}(w_0,\ z_0)$, причем в первом случае точки $(w_n,\ z_n)$ должны иметь предельную точку $(w_0,\ z_0)$ внутри области аналитичности функции и совокупность их должна позволить по значениям $\varphi(w_n,\ z_n)$ вычислить все производные функции $\varphi(w,\ z)$ в точке $(w_0,\ z_0)$. Эти функционалы, очевидно, обладают свойством единственности и потому порождают полные системы функций, будучи применены к полной функции четырех комплексных переменных. Ввиду недостаточной изученности теорем единственности для функций двух переменных, другие рассмотренные у А. И. Маркушевича функционалы, дающие полные системы, не могут быть применены к функциям двух переменных. М. Г. Хапланов

6324. Дифференциальные уравнения и автоморфные функции. Маас (Differentialgleichungen und automorphe Funktionen. Maass Hans), Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954, Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 34—39 (нем.)

Указываются некоторые типы дифференциальных уравнений, важные для теории автоморфных функций.

Пусть S — некоторая область в n-мерном комплексном пространстве, σ — аналитический автоморфизм S. Положим

$$f(z)\,|\,\sigma=\left(\frac{\partial\sigma(z)}{\partial z}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial\overline{\sigma(z)}}{\partial z}\right)^{\beta}f(\sigma z),$$

где α и β — любые комплексные числа. Дифференциальные уравнения, заменяющие требования аналитичности, очевидно, должны обладать следующим свойством: вместе с $f(z)$ их решением является $f(z)\,|\,\sigma$.

Для случая $\alpha=\beta=0$ автор рассматривает уравнения типа $(\Delta+\lambda)f=0$, где Δ — дифференциальный оператор Бельтрами—Лапласа. Отмечаются некоторые приложения таких автоморфных функций, в частности, к задаче о взаимно однозначном соответствии между рядами Дирихле и модулярными формами от многих переменных.

В конце статьи рассматриваются ряды, введенные Зигелем в связи с неопределенными квадратичными формами

$$E(z,\ \alpha,\ \beta)=\sum_{\omega(\sigma)}\omega(\sigma)(cz+d)^{-\alpha}(c\bar z+d)^{-\beta},$$

где $\sigma z=(az+b)(cz+d)^{-1}$ пробегают все неэквивалентные в некотором смысле преобразования из группы Γ. Отмечается, что этот ряд удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\Omega_{\alpha,\beta}E(z,\ \alpha,\ \beta)=0,$$

$$\Omega_{\alpha,\,\beta}=2\alpha y i\frac{\partial}{\partial\bar z}-2\beta y i\frac{\partial}{\partial z}-4y^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}.$$

Аналогичные уравнения и ряды приводятся для некоторых типов многомерных комплексных и вещественных симметрических пространств.

И. И. Пятецкий

6325. Об аналоге теоремы Римана для линейных гиперболических систем дифференциальных уравнений. Шабат Б. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 101—105

Рассматривается существенная для приложений задача отображения плоских областей для гиперболических систем первого порядка (аналогичная задаче конформного отображения для эллиптической системы Коши-Римана). Для случая постоянных коэффициентов рассматриваемая система может быть приведена

к виду: $u_x = v_y$; $u_y = v_x$. Задача отображения может быть решена только, если рассматриваемые в каждой из плоскостей области однотипно расположены относительно характеристик $x \pm y = c$ и их образов $u \pm v = c$. Указывается, что если область D в плоскости (x, y) есть область «типа полуплоскости» или «типа полосы», то существует решение системы, однолистно отображающее ее на полуплоскость или соответственно на полосу плоскости (u, v). Отображение зависит от произвольной функции. Результаты могут быть распространены на системы с переменными коэффициентами. З. Я. Шапиро

6326. Аналог теоремы Ф. и М. Рисс для минимальных поверхностей. Рид (Analogue of a theorem of F. and M. Riesz for minimal surfaces. Reade Maxwell O.), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 3, 177—179 (англ.)

Через PL обозначается класс функций $p(z)$, определенных в $|z|<1$, принимающих там действительные значения и удовлетворяющих следующим условиям: 1) $p(z)$ непрерывна в $|z|<1$; 2) $p(z) \geqslant 0$; 3) $\ln p(z)$ субгармонична в той части $|z|<1$, где $p(z)>0$.

Устанавливается теорема 1: Пусть $p(z) \in PL$ и ограничена в $|z|<1$. Тогда если $\lim_{r\to 1} p(re^{i\theta}) = 0$ при $\theta \in E$, $mE > 0$, то $p(z) \equiv 0$.

При доказательстве теоремы 1 автор применяет рассуждения, аналогичные использованным братьями Рисс при доказательстве теоремы единственности аналитических функций (см., например, Маркушевич А. И., Успехи матем. наук, 1949, 4, вып. 4, 3—18). Заметим также, что с помощью приема, обычно применяемого при рассмотрении логарифмически субгармонических функций, теорема 1 автора может быть непосредственно выведена из теоремы единственности аналитических функций. В качестве простого приложения теоремы 1 автор выводит теорему 2:

Пусть $X_j(z) \equiv X_j(x, y)$, $j = 1, 2, 3$ — координатные функции для ограниченной минимальной поверхности S, данные в изотермическом представлении с $z = x + iy$, меняющемся в круге $|z|<1$, и пусть для некоторых фиксированных чисел a_1, a_2, a_3

$$\lim_{r\to 1} \sum_{j=1}^{3} \{X_j(re^{i\theta}) - a_j\}^2$$

на множестве E, $mE > 0$. Тогда $X_j(z) \equiv a_j$ в $|z|<1$, $j = 1, 2, 3$. Автор, видимо, не знаком с работой С. М. Лозинского (Изв. АН СССР, 1944, 8, 175—194), где были рассмотрены аналогичные вопросы. Г. Ц. Тумаркин

6327. Моногенные гиперкомплексные функции. Морев И. А., Физ. матем. сб. Тр. Ивановск. энерг. ин-та, 1956, вып. 2, 1—41

Пусть A^r (r — натуральное $\geqslant 1$) — ассоциативная и коммутативная алгебра с единицей, обозначаемой 1, над полем комплексных чисел, с базой: $1, e_r, (e_r)^2, \ldots, (e_r)^{r-1}$, причем закон умножения определяется условиями: $(e_r)^r = 0$, $(e_r)^k \neq 0$ для $k = 1, \ldots, r-1$ (здесь $(e_r)^k$ есть e_r в степени k: $k = 1, 2, \ldots$). Пусть $\zeta^r = z + T^r$ (здесь r — индекс, указывающий ранг алгебры A^r), где $z = x + iy$ (x, y — действительные, $i^2 = -1$) и где для $r = 1$: $T^r \equiv 0$, а для $r > 1$: $T^r = \sum_{k=1}^{r-1} t^k (e_r)^k$, t^k (k — индекс) — комплекснозначная функция переменного z, однозначная и удовлетворяющая условию Липшица в некоторой области D плоскости xy ($k = 1, \ldots, r-1$). Пусть $\mathfrak{M}_D^r$ — множество всех гиперкомплексных функций (в алгебре A^r) точки области D, моногенных по ζ^r в D (согласно определению референта: РЖМат, 1957, 2252).

Основные результаты: 1) Для всякой f, $f \in \mathfrak{M}_D^r$, имеем в D при $r > 1$:

$$f = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{w^{(k)}}{k!} (T^r)^k + e_r \sum_{j=0}^{r-2} \delta^j (e_r)^j, \qquad (1)$$

где $w \in \mathfrak{M}_D^1$, т. е. w — комплексная функция переменного z, голоморфная в области D; $w^{(k)} = d^k w / dz^k$ ($k = 0, \ldots, r-1$); δ^j (j — индекс; $j = 0, \ldots, r-2$) — такая комплекснозначная однозначная функция точки области D, что $[\delta^0 + \delta^1 e_{r-1} + \ldots + \delta^{r-2}(e_{r-1})^{r-2}]$ — моногенная по ζ^{r-1} (в алгебре A^{r-1}) в области D.

2) Наоборот, для всякой функции $w \in \mathfrak{M}_D^1$ и для всякой $\varphi \in \mathfrak{M}_D^{r-1}$ ($r > 1$) имеем из (1), полагая $\varphi = \delta^0 + \delta^1 e_{r-1} + \ldots + \delta^{r-2}(e_{r-1})^{r-2}$, что $f \in \mathfrak{M}_D^r$.

3) Если

$$\varkappa(z) \equiv \sum_{k=0}^{r-1} \frac{w^{(k)}}{k!} (T^r)^k, \quad w \in \mathfrak{M}_D^1,$$

тогда $\varkappa(z) \in \mathfrak{M}_D^r$, причем в области D:

$$\frac{d^\lambda \varkappa(z)}{(d\zeta^r)^\lambda} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{w^{(k+\lambda)}}{k!} (T^r)^k; \quad \lambda = 1, 2, \ldots$$

4) Если $f \in \mathfrak{M}_D^r$, то f имеет в D производные всех порядков по ζ^r и разлагается в ряд Тейлора, как обычная аналитическая функция от ζ^r, в каждом круге, расположенном в D.

5) Множество $\mathfrak{M}_D^r$ есть коммутативное кольцо.

6) Пусть $a_n = \mu_n^0 + \mu_n^1 e_r + \ldots + \mu_n^{r-1}(e_r)^{r-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где μ_n^k — комплексная постоянная ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $k = 0, \ldots, r-1$). Если в круге $K: |z - z_0| < \rho$, $K \subset D$, сходятся степенные ряды

$$\mu_0^k + \mu_1^k (z - z_0) + \mu_2^k (z - z_0)^2 + \ldots \ (k = 0, \ldots, r-1),$$

то в этом круге сумма степенного ряда

$$a_0 + a_1(\zeta - \zeta_0) + a_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \ldots,$$

где $\zeta(\zeta_0)$ — значение функции ζ^r в точке $z(z_0)$, есть функция, моногенная по $\zeta^r(z)$.

7) Из приведенных теорем автор сразу получает для частного вида функции ζ^r результаты Дуглиса (РЖМат, 1954, 2149), который не исходил из общего понятия моногенности в смысле референта. Библ. 13 назв. В. С. Федоров

6328. О функциях обобщенного комплексного переменного. Патер (Despre funcţii de o variabilă complexă generalizată. Pâter Z.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, A8, № 8, 399—405 (рум.; рез. русск., франц.)

Для всяких двух действительных постоянных ε и η определяется алгебра упорядоченных пар действительных чисел (a_1, a_2) правилами действий:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 + \varepsilon a_2 b_2, a_2 b_1 + a_1 b_2 + \eta a_2 b_2).$$

Имеем:

$$(a_1, a_2) = a_1 + k a_2, \text{ где } 1 = (1, 0), \ k = (0, 1), \ k^2 = \varepsilon + \eta k.$$

В этой алгебре строится обычным способом теория пределов и дифференцируемых функций вида (P, Q),

где P и Q — действительные функции действительных переменных x_1 и x_2 с непрерывными частными производными 1-го порядка. Дифференцируемость такой функции по переменному (x_1, x_2) характеризуется «обобщенной системой Коши-Римана» вида:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = -\eta \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = \varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_1}.$$

Определяются в этой алгебре аналоги элементарных целых трансцендентных функций, с помощью которых решаются системы:

$$\frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z, \quad \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z$$

с постоянными действительными коэффициентами, а для систем вида:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_1(x)\, y_1 + \varepsilon a_2(x)\, y_2 + b_1 x;$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_2(x)\, y_1 + [a_1(x) + \eta a_2(x)]\, y_2 + b_2(x)$$

(в которых x и все функции от x действительные) доказывается следующая формула общего решения:

$$Y = e^{\int A(x)\,dx} \int B(x)\, e^{-\int A(x)dx}\, dx + Ce^{\int A(x)dx},$$

где C — произвольный постоянный элемент алгебры, $Y = (y_1, y_2)$, $B(x) = (b_1(x), b_2(x))$, $A(x) = (a_1(x), a_2(x))$ и показательная функция определяется известным степенным рядом. Имеются опечатки, исправленные в реферате. В. С. Федоров

6329 К. Элементы теории функций комплексной переменной. Лекции. Шумов А. С. Всес. заоч. энерг. ин-т. М., 1956, 136 стр., илл., беспл.

6330 К. Граничные свойства аналитических функций. Привалов (Randeigenschaften analytischer Funktionen. Privalov I. I. Übers. aus dem Russ. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1956, VIII, 247 S., ill., 29. 60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., (нем.) 1956, А, № 47, 3346
Перевод с русского.

6331 К. Комплексные числа и конформные отображения. Маркушевич А. И. (Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen. Markuschewitsch A. I. Über. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 56 S., ill.) (нем.)
Перевод с русского.

6332 Д. Производная Шварца и однолистная выпуклая функция, обобщение на многолистные функции. Гейбриэл (The Schwarzian derivative and Schlicht convex function, and a generalization to multivalent functions. Gabriel Richard Francis. — Doct. diss. Rutgers Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 12, 2537 (англ.)
Краткий реферат диссертации автора. Основным результатом гл. I является следующий: Пусть $f(z) = z^{-1} + a_1 z + \ldots$ является аналитической и однозначной в $0 < |z| < 1$. Пусть c_0 есть наименьший положительный корень уравнения $2x^{1/2} - \operatorname{tg} x^{1/2} = 0$. Если $\{f(z), z\}$ означает производную Шварца функции $f(z)$ и если $|\{f(z), z\}| \leqslant 2c_0$ в $|z| < 1$, то $f(z)$ однолистна в $0 < |z| < 1$ и отображает каждый круг $|z| < r$, $r < 1$, на внешность выпуклой области. Постоянная c_0 является наилучшей. В гл. II введена в рассмотрение обобщенная производная Шварца и получены некоторые условия, достаточные для n-листности и выпуклости функции. Работа содержит и другие результаты, связанные с приведенными.
Ю. Е. Аленицын

См. также: 6089 К, 6119, 6279, 6372, 6376, 6380, 6652.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6333. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Африат (Simultaneous linear differential equations with constant coefficients. Afriat S. N.), Philos. Soc., 1956, 52, № 2, 209—212 (англ.)
Рассматривается система

$$\sum_i \sum_k l_{jk}^{(i)} X_k^{(i)} = F_j \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ j, k = 1, 2, \ldots, m)$$

m линейных дифференциальных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами относительно m функций X_k. F_j суть аналитические функции. Если матрица коэффициентов при n-х производных неособенная, то система записывается в форме

$$\mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{a}_1\mathbf{X}^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{a}_n\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}$ — вектор, элементами которого являются неизвестные функции, $\mathbf{Y}$ — вектор, элементы которого заданные функции, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — заданные постоянные квадратные матрицы.

Обозначим

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_0^{(1)} \\ \mathbf{X}_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{a}_n \\ -1 \ldots 0 \quad 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \ldots -1 \quad 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где индексами-нулями намечены значения функций при $t = 0$.

Доказывается следующая теорема. Уравнение (1) с начальными данными $\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}_0^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots n-1)$ эквивалентно уравнению

$$\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{c}\mathbf{U} = \mathbf{V}.$$

(с $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ для $t = 0$). Оно имеет решение

$$\mathbf{U} = e^{-\mathbf{c}t}\left\{\mathbf{U}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{c}\theta}\mathbf{V}\,d\theta\right\},$$

где для индексов j_γ, таких, что $\prod_\gamma (c-\gamma 1)^{j_\gamma}=0$, справедливо соотношение

$$e^{ct}=\sum_\gamma R_\gamma \sum_{0\leqslant s<j_\gamma}\frac{t^s}{s!}e^{\gamma t}(c-\gamma 1)^s,$$

$$R_\gamma=\prod_{\mu\neq\gamma}(c-\gamma 1)^{j_\mu}\Big/\sum_\alpha\prod_{\alpha\neq\beta}(c-\beta 1)^{j_\beta}.$$

Для постоянной $\mathbf{V}=\mathbf{V}_0$ решением является

$$\mathbf{U}=e^{-ct}(\mathbf{U}_0+c^{-1}\mathbf{V}_0)+c^{-1}\mathbf{V}_0,$$

в предположении, что $\mathbf{c}$ регулярно, для чего необходимым и достаточным условием является регулярность $\mathbf{a}_n$; если $\mathbf{V}_0$ равно нулю, решением будет $\mathbf{U}=e^{-ct}\mathbf{U}_0$. Если $t\tau=n$ — целое, то

$$e^{-c^t}=\overbrace{\mathbf{k}\ldots\mathbf{k}}^{n}=\mathbf{k}^n,$$

где $\mathbf{k}=e^{-c\tau}$. Характеристические значения γ матрицы $\mathbf{c}$ суть корни уравнения

$$|\gamma^n 1-\gamma^{n-1}\mathbf{a}_1+\ldots+(-1)^n\mathbf{a}_n|=0.$$

П. И. Кузнецов

6334. О номографировании общих интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Смирнов С. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 217—218

6335. Об интегрирующих множителях системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Самуэль О. И., Тр. Среднеаз. ун-та, 1956, вып. 66, 43—49

Доказана следующая теорема, позволяющая обобщить понятие интегрирующего множителя Эйлера для системы

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,\ldots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n(x_1,\ldots,x_n)}. \qquad (1)$$

Пусть $N_{ij}(i,\ j=1,\ldots,n)$ — функции от $x_1,\ldots,x_n$ такие, что 1) все $N_{ii}\equiv 0$, 2) $N_{ij}=-N_{ji}$,

3) $$\sum_{k\neq i}^{1,\,n}\frac{\partial(N_{ik}P_k)}{\partial x_j}=\sum_{k\neq j}^{1,\,n}\frac{\partial(N_{jk}P_k)}{\partial x_i}.$$

Если функция $F(x_1,\ldots,x_n)$ определена из вполне интегрируемой системы

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{k\neq i}^{1,\,n}N_{ik}P_k\ (i=1,\ldots,n),$$

то уравнение $F(x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{const}$ дает интеграл системы (1).

Установлена связь этого результата с методом интегрируемых комбинаций, а также с бесконечно малыми преобразованиями. Г. Л. Мизерюк

6336. Решение операционным методом дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами (преобразование Лапласа). Муравьев П. А., Физ.-матем. сб. тр. Ульяновск. энерг. ин-та, 1956, вып. 2, 42—74

Рассматривается уравнение

$$Lf(t)+\Lambda f(t-\tau)=F(t). \qquad (1)$$

Здесь: 1) $L\equiv d^2/dt^2+a_1 d/dt+a_2$, $\Lambda=b_0 d^2/dt^2+b_1 d/dt+b_2$, где a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 — постоянные; 2) τ — постоянная, $\tau>0$; 3) $F(t)$ — данная функция для $-\infty<t<+\infty$, изображение которой существует; 4) $f(t)$ — искомая функция, которая должна удовлетворять следующим условиям: а) $f(t)\equiv 0$ для $t<0$; б) $f(t)$ и $f'(t)$ — непрерывны для $0<t<\infty$ и существуют предельные конечные значения $f(+0)=l_0$, $f'(+0)=l_1$, где l_0 и l_1 — данные числа; в) для промежутков $k\tau<t<(k+1)\tau\ (k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ существует $f''(t)$ и удовлетворяет уравнению (1).

Если t изменяется в интервале $0<t<\tau$, то уравнение (1) сводится к обыкновенному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами $Lf(t)=F(t)$. Пусть решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $f(+0)=l_0$, $f'(+0)=l_1$ есть $f_0(t)$, тогда можно в интервале $\tau<t<2\tau$ решить уравнение

$$Lf(t)+\Lambda f_0(t-\tau)=F(t)$$

при начальных условиях: $f(\tau)=f_0(\tau)$, $f'(\tau)=f_0'(\tau)$. Это решение обозначим через $f_1(t)$. Таким путем автор строит последовательность решений $f_0(t)$, $f_1(t),\ldots$, $f_k(t),\ldots$ Очевидно, решением $f(t)$ уравнения (1) для $k\tau<t<(k+1)\tau$ будет $f(t)=f_k(t)$.

Для нахождения $f_k(t)$ автор применяет преобразование Лапласа. При этом он показывает, что вместо $f_k(t)$ удобнее взять

$$\Psi_j(t)=\sum_{k=1}^{j}[f_k(t)-f_{k-1}(t)]\,\eta(t-k\tau)+f_0(t)\,\eta(t),$$

где $\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

В работе в явном виде дано выражение для

$$\overline{\Psi}_j(p)=\int_0^\infty \Psi_j(t)\,e^{-pt}dt. \qquad (2)$$

Так как полюса функции $\overline{\Psi}_j(p)$ легко вычисляются, то обращение интеграла (2) доводится до конца, и тем самым получается в явном виде решение $f(t)$ уравнения (1) для $0<t<(j+1)\tau$.

В работе сначала рассмотрено уравнение (1) без правой части, а затем неоднородное уравнение (1).

И. И. Кузнецов

6337. О преобразованиях дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Хаяси (On transformations of differential equations whose second members are discontinuous. Hayashi Kyuzo), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, **A 29**, № 2, 131—137 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dy/dt=f(x,y),\ 0\leqslant x\leqslant a,\ |y|<\infty,\ y=(y_1,\ldots,y_n), \qquad (1)$$

где функции $f_j(x,y)$ измеримы относительно x, непрерывны по y и для любого $t\geqslant 0$, $\max\limits_{|y|\leqslant t}|f(x,y)|$ является суммируемой на $0\leqslant x\leqslant a$.

Автор строит топологическое отображение пространства y (включая $|y|=\infty$) на сферу $Y=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$, $|Y|=1$, переводящее систему (1) в систему

$$dY/dx=h(x,\ Y),\ |Y|=1,\ 0\leqslant x\leqslant a, \qquad (2)$$

удовлетворяющую условиям Каратеодори ($h(x,\ Y)$ мажорируется суммируемой функцией $M(x)$).

Отсюда получаются теоремы о существовании решения $y=y(x)$, проходящего через данную точку, и

об уходе решения в бесконечность: $\lim_{x\to x_1-0} |y(x)| = \infty$, если данное решение $y(x)$ не продолжаемо до $x = a$. Ю. К. Солнцев

6338. Способ вычисления наибольшей вещественной части корней характеристического уравнения. Мельников Г. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 180—187, 212 (рез. англ.)

Рассматривается характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$p_0 x + p_1 x^{(1)} + \ldots + p_n x^{(n)} = 0.$$

Излагается способ построения вспомогательного уравнения и показывается, что все вещественные части корней рассматриваемого уравнения являются вещественными корнями вспомогательного уравнения, причем наибольшая вещественная часть корней рассматриваемого уравнения является наибольшим вещественным корнем и наибольшей вещественной частью корней (максимальным корнем, по определению автора) вспомогательного уравнения.

Далее описывается весьма естественный метод построения последовательных приближений по избытку для существующего максимального отрицательного корня алгебраического уравнения. Приводится доказательство сходимости последовательности приближений и оценка их погрешности. Библ. 4 назв. А. Д. Горбунов

6339. Применение теории бесконечно малых преобразований Софуса Ли к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Окилевич (Прилог Sophus Lie-oboj теорији инфинитезималних трансформација за интеграљење обичних диференцијалних једначина. Окиль е в и ћ Блажо), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије 1954, 6, № 3-4, 185—198 (серб.; рез. франц.)

Показано, что для того чтобы система

$$dy_i = Y_i(x, y, \ldots, y_n)\,dx \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

эквивалентная уравнению в частных производных

$$Y(f) \equiv f_x + \sum_{i=1}^{n} Y_i f_{y_i} = 0,$$

допускала бесконечно малое проективное преобразование

$$V(f) \equiv axf_x + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i f_{y_i},$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Y_i системы (1) имели вид

$$Y_i = x^{b_i/a-1}\,\Phi_i\left(y_1^a/x^{b_1},\ y_2^a/x^{b_2},\ \ldots,\ y_n^a/x^{b_n}\right),$$

где Φ_i — произвольные функции.

Если уравнение

$$y^{(n)} = \Psi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

допускает группу преобразований, продолженную из конформного преобразования $\xi = ax$, $\eta = by$, то для этого необходимо и достаточно выполнение условия

$$\Psi = x^{b/a-n}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b},\ \frac{y'^a}{x^{b-a}},\ \frac{y''^a}{x^{b-2a}},\ \ldots,\ \frac{y^{(b-1)a}}{x^{b-1(n-1)a}}\right).$$

Этот результат позволяет проинтегрировать уравнение

$$y'' = x^{b/a-2}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b},\ \frac{y'^a}{x^{b-a}}\right)$$

при произвольной функции Φ, пользуясь методом Салтыкова (Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du 1er ordre, Mém. Sci. Math., p. 7, Acad. Sci., Paris). Работа является обобщением результата С. Ли. Г. Л. Мизернюк

6340. Об одном классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. Чечик В. А., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 5, 784—786

Исследуется система дифференциальных уравнений

$$y_k' = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\lim_{x\to+0} y_k(x) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \qquad (2)$$

Предполагается, что функции $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$ вместе со своими производными $f'_{k,y_k}(x, y_1, \ldots, y_n)$ (функция с индексом k дифференцируется по переменной y_k с тем же индексом) непрерывны по совокупности переменных в области $D: 0 < x \leqslant b$, $|y_i| \leqslant a$. В отличие от известных исследований Каратеодори автор допускает существование у функций $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$ несуммируемых особенностей в точке $x = 0$.

Теорема 1. Пусть в области D выполняются неравенства

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n)| \leqslant \psi(x) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$f_{k,y_k}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant \psi(x) \quad (k = 1, \ldots, l),$$

$$f_{k,y_k}(x, y_1, \ldots, y_n) \geqslant \bar{\psi}_k(x) \quad (k = l+1, \ldots, n),$$

где l — некоторое число, $0 \leqslant l \leqslant n$, $\psi(x)$ — непрерывная суммируемая функция, $\bar{\psi}_k(x)$ — положительные несуммируемые функции. Тогда задача (1)—(2) имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство теоремы 1 основано на применявшемся ранее переходе от задачи (1)—(2) к системе нелинейных интегральных уравнений

$$y_k(x) = \int_0^x \exp\int_x^t \left[\Phi_k ds\right] f_k^0 dt \quad (k = 1, \ldots, l),$$

$$y_k(x) = C_k \exp\left[-\int_x^b \Phi_k ds\right] - \int_x^b \exp \times$$

$$\times\left[-\int_x^t \Phi_k ds\right] f_k^0 dt \quad (k = l+1, \ldots, n),$$

где C_k — параметры,

$$f_k^0 = f_k(t, y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n) \text{ и}$$

$$\Phi_k = \Phi_k(s, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f_k(s, y_1, \ldots, y_n) - f_k(s, y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{y_k}, \\ \qquad y_k \neq 0, \\ f'_{k,y_k}(s, y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n), \\ \qquad y_k = 0. \end{cases}$$

В теореме 2 утверждается, что в условиях теоремы 1 решение задачи (1)—(2) неединственно при $l < n$, причем это решение зависит от $n - l$ параметров.

Если $l = n$, то для единственности достаточно (теорема 3), чтобы существовали производные

$f'_{k,y_i}(x, y_1, \ldots, y_n)$ при $i \neq k$ и чтобы эти производные в области D удовлетворяли неравенствам

$$|f'_{k,y_i}(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \psi(x).$$

В теореме 5 указаны условия, при которых уравнение $y' = f(x, y)$ не имеет решений, удовлетворяющих нулевому начальному условию.

В конце статьи рассмотрен вопрос о зависимости решений сингулярных систем дифференциальных уравнений от начальных данных. Эта часть связана с работой А. Д. Мышкиса и У. К. Гринфельд (РЖМат, 1957, 4782) М. А. Красносельский

6341. Исследование поведения решений систем линейных дифференциальных уравнений в окрестности точки типа иррегулярной. Басов В. П., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 1, 97—109

Приводится обзор некоторых результатов об асимптотическом поведении решения систем линейных дифференциальных уравнений. В связи с этим делается ряд критических замечаний к работе И. М. Рапопорта (РЖМат, 1957, 5569 К).

Утверждается, что метод И. М. Рапопорта не нов и основан на идее, высказанной Н. П. Еругиным (Тр. матем. ин-та АН СССР, 1946, **13**, 95 стр.).

На эту работу Н. П. Еругина у И. М. Рапопорта ссылок нет. Н. И. Гаврилов

6342. Замечания к статье В. П. Басова «Исследование поведения решений систем линейных дифференциальных уравнений в окрестности точки типа иррегулярной». Рапопорт И. М., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 1, 110—111

Приводится ответ автора на критические замечания В. П. Басова (реф. 6341). Автор утверждает, что отсутствие у него ссылок на работу Н. П. Еругина объясняется тем, что идеи метода Н. П. Еругина были высказаны еще ранее в работах О. Перрона, Н. Левинсона и Г. Шпета. Автор отмечает, что новое, внесенное им в теорию, состоит в том, что указан способ приведения некоторых матриц к L-диагональному виду.

Примечание референта. Референт не считает эти доводы убедительными. Н. И. Гаврилов

6343. Об интегрировании системы линейных однородных дифференциальных уравнений с невырожденной матрицей W. Амато (Sull'integrazione di un sistema di equazioni differenziali lineari omogence a matrice circolante W. Amato Vincenzo), Matematiche, 1953, 8, 23—26) (итал.)

Пусть линейная система

$$y' = Ay, \qquad (1)$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и A — матрица, $A = a_1E + a_2W + \ldots + a_nW^{n-1}$, $a_i = a_i(x)$, $W = \| a_{ij} \|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $a_{i,\,i+1} = 1$, $a_{n,\,1} = W = \text{const} \neq 0$; кроме того, $a_{ij} = 0$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни n-й степени $1/W$. Тогда общий интеграл (1) будет иметь вид

$$y_k = \frac{W}{n} \sum_i c_i d_i^{n-k+1} A_i(x),$$

где $A_i(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} W \sum_j a_j a_i^{n-j+1} dx\right)$. Ch. Blanc

Перевод из Zbl. Math., 1954, 50, № 6-10, 315.

6344. Поведение решений систем линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки типа иррегулярной. Басов В. П., Матем. сб., 1956, 40, № 3, 339—380

Рассматриваются матричные уравнения

$$dX/dt = (P^{(0)} + P)X. \qquad (1)$$

Здесь $P^{(0)}$ и P — квадратные матрицы n-го порядка, причем $P^{(0)}$ — постоянная матрица, а матрица P представима в виде ряда

$$P = \sum_{l_1+\ldots+l_k>0} t^{-(l_1\gamma_1+\ldots+l_k\gamma_k)} P^{(l_1\ldots l_k)}, \qquad (2)$$

где k — любое фиксированное положительное целое число, $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ — любые несоизмеримые вещественные положительные числа, $P^{(l_1,\ldots,l_k)}$ — матрицы, либо постоянные, либо периодические относительно t с одним и тем же вещественным периодом ω. Ряд (2) равномерно сходится при $t \geqslant t^*$.

Сначала исследуются системы (1) специального вида

$$\begin{cases} \dfrac{dX_s}{dt} = t^{\beta_s} P_{ss} X_s + \sum_{\sigma=1}^{l_1} t^{\beta_\sigma} Q_{s\sigma} X_\sigma + \\ + \sum_{\sigma=l_1+1}^{l} t^{-\alpha_\sigma} R_{s\sigma} X_\sigma \quad (s = 1, 2, \ldots l_1) \\ \dfrac{dX_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{l_1} t^{\beta_\sigma} Q_{s\sigma} X_\sigma + \sum_{\sigma=l_1+1}^{l} t^{-\alpha_\sigma} R_{s\sigma} X_\sigma \\ (s = l_1 + 1, \ldots l). \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь X_σ — неизвестные матрицы, имеющие m_σ строк и m столбцов $(m_1 + \ldots + m_l = n,\ 1 \leqslant m \leqslant n)$, α_s и β_s — вещественные постоянные, удовлетворяющие неравенствам:

$$\alpha_s > 1 \quad (s = l_1 + 1, \ldots l), \quad \beta_s > -1 \quad (s = 1, 2, \ldots, l_1)$$

$R_{s\sigma}$ и $Q_{s\sigma}$ — заданные матрицы, непрерывные и ограниченные при $t \geqslant t^*$, причем

$$\lim_{t\to\infty} Q_{s\sigma} = 0,$$

P_{ss} — заданные постоянные матрицы, характеристические числа которых имеют отличные от нуля вещественные части.

Доказывается следующая теорема: При сделанных выше предположениях каждому α_i $(i = l_1 + 1, \ldots l)$ отвечает m_i-столбцевое решение системы (3) вида

$$X_s = t^{-(\alpha_i+\beta_s)} U_s \quad (s = 1, \ldots, l_1),$$

$$X_s = \delta_{si} I + t^{-(\alpha_i-1)} U_s \quad (s = l_1 + 1, \ldots l),$$

где I — квадратная единичная матрица порядка m_i, U_s $(s = 1, \ldots l)$ — матрицы, имеющие m_s строк и m_i столбцов, δ_{si} равно 1 при $s = i$ и равно 0 при $s \neq i$.

Предполагая далее, что характеристическое уравнение

$$D(P^{(0)} - \varkappa I) = 0$$

имеет либо простой вещественный корень, либо пару простых комплексно сопряженных корней, либо, наконец, группу простых корней, имеющих одинаковые вещественные части, автор строит отвечающие этим корням решения как в виде формальных, так и в виде равномерно сходящихся рядов. Доказывается, что формальные решения дают асимптотические разложения истинных решений.

Для построения указанных решений используются специальные преобразования систем общего вида (1) к системам вида (3). Д. П. Костомаров

6345. Достаточные условия существования нескольких предельных циклов. Маркосян С. А., Докл. АН АрмССР, 1956, **23**, № 4, 153—159 (рез. арм.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = [f(x) + by]\,\Phi(x, y),$$
$$dy/dt = [ax + \varphi(y)]\,F(x, y), \qquad (1)$$

где a, $b = \pm 1$. Предполагается, что начало координат является единственным состоянием равновесия системы и что правые части определены и удовлетворяют условию Липшица во всякой ограниченной области плоскости.

Приводятся достаточные условия существования не менее любого, наперед заданного числа предельных циклов системы уравнений (1). В. А. Плисс

6346. Особенности аналитической системы дифференциальных уравнений на плоскости. Барочо (Singularities of analytical differential systems in the plane. Barocio Samuel), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, **42**, № 10, 765—766 (англ.)

Автор рассматривает поведение характеристик дифференциального уравнения

$$dy/dx = [Y_n(x, y) + Y(x, y)]/[X_n(x, y) + X(x, y)] \qquad (1)$$

(где $X_n(x, y)$ и $Y_n(x, y)$ — однородные полиномы степени n, а $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — аналитические функции, содержащие лишь члены порядка выше n) в окрестности начала, причем предполагается, что уравнение возможных касательных $xY_n(x, y) - yX_n(x, y) = 0$ не удовлетворяется тождественно. Автор указывает, что топологическую картину поведения характеристик уравнения (1) можно изучить с помощью метода Пюизё (Puiseux) (близко примыкающего по своей идее к методу Фроммера (Frommer), причем изучению помогает знание ветвей изоклин нуля и бесконечности, входящих в начало. Пользуясь этими методами, автор рассматривает все топологически различные случаи поведения характеристик уравнения (1) в окрестности начала при условии, что $X_n = ax + by$ и $Y_n = cx + dy$, причем, хотя бы один из четырех коэффициентов a, b, c и d отличен от нуля. Следует отметить, что как метод автора, так и полученные им результаты не являются новыми, так как эти результаты (и, притом, тем же методом) были получены Н. Б. Хаимовым (Уч. зап. Сталинаб. ин-та, 1952, **2**, 3—30) и, кроме того, А. Ф. Андреевым (РЖМат, 1956, 7329). И. С. Куклес

6347. Об особой точке типа центра. Сайто (On center-type singular points. Saito Tosiya), Kodai Math. Sem. Repts, 1955, **7**, № 3-4, 89—96 (англ.)

В работе автор рассматривает некоторые специальные случаи, когда начало для дифференциального уравнения

$$ydy/dx = -x + P(x, y) \qquad (1)$$

(где $P(x, y)$ — полином, не содержащий членов ниже второй степени) является особой точкой типа центра. В первом предложении автор доказывает, что, если $P(x, y) = x^p \sum_n^N a_k y^k$ $(n + p \geqslant 2)$, то начало будет центром тогда и только тогда, когда либо число p — четное, либо полином $\sum_n^N a_k y^k$ содержит только нечетные степени. Во втором предложении доказывается, что, если $P(x, y) = y^p \sum_n^N b_k X^k$ $(n + p \geqslant 2)$, то необходимые и достаточные условия центра заключаются в том, что, либо p — нечетное, либо полином $\sum_n^N b_k X^k$ содержит только четные степени. Заметим, что оба указанных предложения не являются новыми, так как они содержатся как частный случай в работах референта (Докл. АН СССР, 1938, **19**, № 6-7; 1944, **52**, № 5; Тр. Узб. гос. ун-та им. Алишера Навои, 1951, № 47, 31—98), которые автор не цитирует.

Далее, автор рассматривает случай, когда $P(x, y)$ является однородным полиномом степени n: $P(x, y) = r^n P_1(\theta)$, где $P_1(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{im\theta}$, причем $a_{m-1} + a_{m+1} = \alpha_m$ и $a_{m-1} - a_{m+1} = \beta_m$. Для этого случая автор выводит необходимые и достаточные условия центра в виде бесконечной последовательности соотношений:

$$\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_k=0} \left\{\left(\alpha_{m_1} - \frac{(k-1)n+2}{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}}\beta_{m_1}\right)\times\right.$$
$$\times\left(\alpha_{m_2} - \frac{(k-2)n+2}{m_2+\ldots+m_{k-1}}\beta_{m_2}\right)\times$$
$$\left.\times\ldots\left(\alpha_{m_k} - \frac{n+2}{m_{k-1}}\beta_{m_k-1}\right)\beta_{m_k}\right\} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Пользуясь соотношениями (2), автор находит условия центра для случаев, когда $P(x, y)$ есть однородный полином второй, или третьей степени: $P = ax^2 + bxy + cy^2$ и $P = px^3 + qx^2y + rxy^2 + sy^3$. В первом из этих случаев условие центра имеет вид: $b(a + c) = 0$, а во втором случае — это условие имеет вид: $q = s = 0$. Заметим, что оба последних результата, относящихся к однородным полиномам второй и третьей степени, не являются новыми: первый из них вытекает, как частный случай из результатов Фроммера (Frommer M., Math. Ann., 1934, Bd. 109) и Н. А. Сахарникова (Прикл. матем. и механика, 1946, вып. 5), а второй вытекает, как частный случай из результатов М. И. Альмухамедова (Известия физико-математич. общества, Казань, 1937, **9**, 107—126) и референта (Докл. АН СССР, 1944, **52**, № 4). Эти работы автор не цитирует.

Наконец, автор рассматривает условия центра для случаев, когда $P(x, y) = (x^2 + y^2)^N Q(x, y)$ где $N \geqslant 1$, а $Q(x, y)$ — однородный полином второй, или третьей степени, а также для случая, когда $P_1(\theta) = a_{-2s}e^{-2is\theta} + a_{2s}e^{2is\theta}$ $(s \geqslant 1)$ и доказывает, что в этих случаях начало будет центром тогда и только тогда, когда характеристики симметричны относительно какой-либо из координатных осей. И. С. Куклес

6348. Качественное исследование уравнения $(u'')^2 = u + u'$. Массера (Estudio cualitativo de la ecuación $(u'')^2 = u + u'$ Massera José L.), Publs Inst. mat. y estadist. Fac. ingr. y agrimens., 1956, **3**, № 1, 1—10 (исп.; рез. англ.); Bol. Fac. ingr. y agrimens. Montevideo, 1956, **5**, № 13, 339—347 (исп.)

Эта задача, поставленная Белманом (Bellman R. Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, p. 192), встречается в теории турбулентности. Полагая $u' = v$ и исключая время, получаем два уравнения первого порядка

$$dv/du = \sqrt{u+v}/v \qquad (1')$$

и

$$dv/du = -\sqrt{u+v}/v. \qquad (1'')$$

Исследуются поля направлений этих уравнений (в области $u + v \geqslant 0$) и особенность в начале координат 0. Результаты следующие:

Уравнение (1′). В 0 входит всего одна интегральная кривая с угловым коэффициентом $(dv/du)_0 = -1$; из 0 выходит тоже одна интегральная кривая. Таким образом, точка 0 неустойчива (вроде седла).

Уравнение (1″). В 0 входит семейство интегральных кривых с $(dv/du)_0 = -1$ и одна интегральная кривая (сепаратриса) с $(dv/du)_0 = -\infty$. Точка 0 устойчива (но не асимптотически).

Решениям с $(dv/du)_0 = -1$ соответствуют решения $u(t)$ заданного уравнения, для которых $u(t) \sim e^{-t}$ при $t \to \infty$. И. М. Соболь

6349. О решениях уравнения Риккати, как функциях начальных значений. Редхеффер (On solutions of Riccati's equation as functions of the initial values. Redheffer Raymond), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 5, 835—848 (англ.)

Решению $u(x, y)$ уравнения Риккати

$$u_y = a(y) + 2b(y)\,u(x, y) + c(y)\,u^2(x, y), \qquad (1a)$$

равному нулю при $y = x$, сопоставляются две функции $v(x, y)$, $w(x, y)$, определяемые условиями

$$v_y = b(y) + c(y)\,u(x, y), \quad v(x, x) = 0, \qquad (1b)$$

$$w_y = c(y)\exp[2v(x, y)], \quad w(x, x) = 0. \qquad (1c)$$

Доказывается, что в некоторой выпуклой области R, симметричной относительно прямой $y = x$, эти величины удовлетворяют условиям:

$$-w_x = c(x) + 2b(x)\,w(x, y) + a(x)\,w^2(x, y), \qquad (2a)$$

$$-v_x = b(x) + a(x)\,w(x, y), \qquad (2b)$$

$$-u_x = a(x)\exp[2v(x, y)] \qquad (2c)$$

и что в области R для этих же величин справедливы функциональные уравнения

$$u(x, z) - u(y, z) = u(x, y)\exp[-v(x, y) + v(x, z) + v(y, z)], \qquad (3a)$$

$$1 - u(x, y)\,w(yz) = \exp[v(x, y) - v(x, z) + v(yz)] \qquad (3b)$$

$$w(x, z) - w(x, y) = w(y, z)\exp[v(x, y) + v(x, z) - v(y, z)]. \qquad (3c)$$

Показано также, что из соотношений (3) при наличии условий

$$u(x, x) = v(x, x) = w(x, x) = 0$$

и дифференцируемости функций u, v, w могут быть получены системы уравнений (1) и (2).

Вводя функции

$$U = u\exp(-v); \quad V = \exp(-v); \quad W = -w\exp(-v);$$

$$S = \exp v - uw\exp(-v),$$

можно получить для них линейные системы уравнений, являющиеся следствием уравнений (1), и функциональные уравнения, эквивалентные системе (3). Н. В. Адамов

6350. Замечание к одной работе Барбути. Якубович В. А., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, 33, № 3, 198—204

Приведены упрощенные доказательства ряда результатов Барбути (см. РЖМат, 1955, 4407) и Гусарова (Докл. АН СССР, 1949, 68, № 2, 217—220) об ограниченности решений уравнения

$$y'' + p(x)\,y = 0 \qquad (1)$$

при $x \to \infty$. Вместо основных теорем Барбути доказывается теорема 1: Пусть $p(x) \geqslant a^2 > 0$, p и p' абсолютно непрерывны и

$$\int_{x_0}^{\infty} p^{-3/2}\,|p''|\,dx < \infty; \quad \int_{x_0}^{\infty} p^{-5/2}\,p'^2 dx < \infty;$$

тогда все решения уравнения (1) ограничены при $x \to \infty$. Если, кроме того, $p(x) \leqslant b^2 < \infty$, то ограничены также и y'. Как следствие этой теоремы получается теорема Гусарова (производная p' абсолютно непрерывна и с ограниченным изменением на (x_0, ∞). Доказывается также, что при $p(x) \geqslant a^2 > 0$ и $\varphi(x) =$

$$= \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{1}{4}\,p^{-3/2}p'' + \frac{5}{16}\,p^{-5/2}p'^2 \right| dx < \infty \text{ или } V_{x_0}^{\infty} p' < \infty$$

справедлива асимптотическая формула

$$I = p^{-1/4}\left(C_1 \sin \int_{x_0}^{x} \sqrt{p}\,dt + C_2 \cos \int_{x_0}^{x} \sqrt{p}\,dt + O[\Phi(x)]\right).$$

Аналогичные результаты известны (см., например, И. М. Рапопорт «О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений», Киев, 1954, стр. 23—28; РЖМат, 1957, 5569 К), однако доказательства автора проще. М. И. Ельшин

6351. О дифференциальных уравнениях, которым подчиняются некоторые явления наследственности. Мидзохата (Sur certaines équations différentielles régissant quelques phénomènes héréditaires. Mizohata Sigeru), Math. Japonicae, 1953, **3**, 1—5 (франц.)

При помощи метода, похожего на стробоскопический метод Минорского, рассматриваются периодические решения некоторого нелинейного функционального уравнения. E. Pinney

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 38.

6352. Об обращении теоремы Четаева. Вркоч Иво, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 4, 451—461 (рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где функции X_i непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\partial X_i/\partial x_j$ при $|x_i| < a$, $t \geqslant 0$ $(a > 0)$. Кроме того, $X_i(0, \ldots, 0, t) = 0$. Доказывается возможность обращения второй теоремы Ляпунова (Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950, теорема III, стр. 92) и теоремы Четаева (Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946, стр. 34). При этом доказывается существование непрерывно дифференцируемой функции $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $V(0, x_1, \ldots, x_n) > 0$ в области неустойчивости $Q(\varepsilon)$ (при $t = 0$). Аналогичные утверждения доказаны референтом (РЖМат, 1955, 4411, 1957, 5564). Заметим, что можно доказать существование непрерывно дифференцируемой функции V, удовлетворяющей условиям теорем Ляпунова и Четаева, и такой, что $V(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$ в области неустойчивости $Q(t, \varepsilon)$ при всех $t > 0$, а требование существования производных $\partial X_i/\partial x_j$ — заменить условиями Липшица по x_j, где L зависит непрерывно от t. Это незначительно обобщает приведенные результаты. Н. Н. Красовский

6353. Ко второй методе Ляпунова. Персидский С. К., Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1956, вып. 4, 43—47

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = f_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n;\ t \geqslant 0), \quad (1)$$

где функции f_s непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Кроме того, $f_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Предлагается следующий критерий неустойчивости: Если существует функция v, определенная в области

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \rho^2, \quad t \geqslant 0,$$

и такая, что $V > 0$ при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$, $dV/dt \geqslant 0$ в силу уравнения (1), $V \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $x_1, \ldots, x_n$, то решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ неустойчиво и любая траектория (1) с возрастанием t покидает сферу $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \varepsilon^2 < \rho^2$. Обсуждаются некоторые изменения формулировки теоремы и ее обобщения. Доказывается обращение теоремы.

Примечание референта. Формулировку обращения теоремы можно усилить, доказав существование функции V, имеющей непрерывные производные любого порядка по всем аргументам в предположении лишь выполнения условия единственности решений (например, условий Липшица по x_j в каждом интервале $0 \leqslant t \leqslant T$). Доказательство обращения содержит неточности, которые, однако, можно исправить. Неясно утверждение автора о необратимости известных теорем второго метода Ляпунова, так как обращение теорем А. М. Ляпунова (Общая задача об устойчивости движения, Харьков, ОНТИ, 1935, стр. 92, т. III) и Н. Г. Четаева (Устойчивость движения, стр. 32; РЖМат, 1956, 8807К) доказана в статьях И. Вркоча и референта (РЖМат, 1957, 5564)

Н. Н. Красовский

6354. Условия асимптотической устойчивости в случае неустановившегося движения и оценка скорости убывания общего решения. Зубов В. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 110—129, 208 (рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (1)$$

где $X_i(x, t)$ заданы при $-\infty < x_i < \infty$ и $-\infty < t < \infty$ и удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решений.

Асимптотически устойчивое нулевое решение системы (1) назовем равномерно асимптотически устойчивым по Ляпунову, если существует такая непрерывная строго монотонно убывающая от бесконечности до нуля функция $L(z)$, $-\infty < z < \infty$, $L(z) \to 0$ при $z \to \infty$ и такое $\varepsilon > 0$, что при

$$\sqrt{x_0^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{02}} < \varepsilon \text{ будет } x^2(t, x_0, t_0) < L(t - t_0).$$

Асимптотически устойчивое нулевое решение называется равномерно притягивающим, если для любой величины $x_0 \neq 0$ можно указать такие величины τ и $\alpha(x_0, \tau)$, что для любого решения будет выполнено неравенство

$$x^2(t, x_0, t_0) > \alpha(x_0, \tau) \text{ при всех } t_0 > 0$$

и при всех t таких, что $t_0 < t < t_0 + \tau$, где $\tau > 0$.

Теорема. Для того, чтобы область A, содержащая вместе с осью $x = 0$ множество $x^2 < \delta_1^2$ и $t > 0$, была областью асимптотической устойчивости равномерно асимптотически устойчиво и равномерно притягивающего нулевого решения системы (1), необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции $v(x_1, \ldots, x_n t)$ и $w(x_1, \ldots, x_n)$, обладающие свойствами:

1. $v(x_1, \ldots, x_n, t) = v(x, t)$ задана в A и непрерывна там, $w(x_1, \ldots, x_n) = w(x)$ задана и непрерывна при всех x.

2. $v(x, t)$ определенно-отрицательная, $w(x) > \alpha_1(\beta) > 0$ при $x^2 > \beta > 0$.

3. $v(x, t) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно относительно t, $w(0) = 0$.

4. $$\lim_{t - t_0 \to 0} \frac{v(x(t, x_0, t_0), t) - v(x_0, t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = w(x_0).$$

5. $\lim v(x, t) = -\infty$ при $(x, t) \to (\bar{x}, \bar{t})$, где $(\bar{x}, \bar{t}) \subset \bar{A} - A$ и является конечной точкой границы области A.

Далее устанавливается достаточный признак асимптотической устойчивости по Ляпунову, являющийся обобщением аналогичного признака А. М. Ляпунова.

Для системы

$$\dot{X} = P(X, t)\, X,$$

где X — столбцевая, а $P(X, t)$ — функциональная матрица, дается ряд оценок решения в случае асимптотической устойчивости по Ляпунову нулевого решения.

Свой метод автор демонстрирует в частных случаях, например, когда

$$P(X, t) = \sum_{k=1}^{m} P_k t^k \text{ или } P(X, t) = A(t).$$

Е. А. Барбашин

6355. Замечание о критическом случае устойчивости особой точки на плоскости. Виноград Р. Э., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 2, 209—212

Для системы уравнений

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y),$$

для которой начало координат есть изолированная особая точка, а функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы, вводятся обозначения:

$$S(x, y) = P'_x(x, y) + Q'_y(x, y);$$

$$\Delta(x, y) = D(P, Q)/D(x, y).$$

Рассматриваются три вида условий, которым могут быть подчинены величины

I. $\Delta(x, y) > 0$; $S(x, y) < 0$,

II. $\Delta(x, y) > 0$; $S(x, y) > 0$.

III. $\Delta(x, y) < 0$

Доказывается теорема: Если существует такая окрестность U_ε особой точки O (0, 0), что всюду в U_ε за исключением, может быть, нигде не плотного множества точек, выполняется одно из условий I, II, III, то в случае I особая точка устойчива, в случае II — вполне неустойчива, в случае III — полуустойчива. Доказательство основано на использовании критерия Бендиксона (второе условие в случаях I и II) и на оценке знака индекса Пуанкаре — на основании первого из условий — во всех трех случаях. Окончательная характеристика особой точки в случаях I, II дается путем непосредственно геометрического исследования. Так как условия I, II и III рассмат-

риваются в окрестности особой точки, то они оказываются достаточными для характеристики точки и в критическом случае.

В заключение показано, что эти условия не являются в критическом случае необходимыми. Н. В. Адамов

6356. **Некоторые методы анализа потока в фазовом пространстве. Каплан** (Some methods for analysis of the flow in phase space. Kaplan Wilfred), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, 2, 99—106 (англ.)

Для системы уравнений

$$dx_k/dt = f_k\ (x_1, \ldots, x_n),\quad k = 1,\ 2, \ldots, n \qquad (1)$$

исследование расположения траекторий в фазовом пространстве проводится путем изучения интегралов системы (1), зависящих от времени, т. е. решений уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0. \qquad (2)$$

В случае $n = 2$ показывается, что знание подобных интегралов позволяет в некоторых случаях находить предельные циклы. Обсуждаются некоторые методы решения уравнения (2). На стр. 104 в формуле (16) имеется опечатка. Формулу следует читать так:

$$\lambda g\,(x, y) + p\,\frac{\partial g}{\partial x} + q\,\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

М. И. Грабарь

6357. **О характере состояния равновесия системы трех дифференциальных уравнений в случае, когда один из корней характеристического уравнения равен нулю. Минц Р. М.**, Докл. АН СССР, 1956, III, № 3, 535—537

Рассматривается система уравнений

$$dx/dt = a_1x + b_1y + P_2\,(x, y, z), \qquad (1)$$

$$dy/dt = a_2x + b_2y + Q_2\,(x, y, z),\quad dz/dt = R_2\,(x, y, z),$$

где P_2, Q_2 и R_2 — ряды, начинающиеся с членов не ниже второй степени по x, y и z. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет два корня с отличной от нуля вещественной частью.

Пусть $x = \varphi\,(z)$, $y = \psi\,(z)$ — решение системы уравнений

$$a_1x + b_1y + P_2\,(x, y, z) = 0,\quad a_2x + b_2y + Q_2\,(x, y, z) = 0$$

и пусть

$$R_2\,(\varphi\,(z),\ \psi\,(z),\ z) = \Delta_m z^m + \ldots$$

В зависимости от не равных нулю корней характеристического уравнения, от знака величины Δ_m и от четности или нечетности числа m устанавливаются возможные типы расположения интегральных кривых в окрестности особой точки $x = y = z = 0$ системы (1).

В. А. Плисс

6358. **Несколько примеров асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений. Татаркевич** (Quelques exemples de l'allure asymptotique des solutions d'équations différentielles. Tatarkiewicz Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1954 (1956), A8, 105—133 (франц.; рез. польск., русск.)

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(t)\,x^{(i-1)} +$$

$$+ d\,(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t) + f\,(t), \qquad (1)$$

где функции $a_i = a_i\,(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $f\,(t)$ — непрерывны при $t \geqslant 0$ и функция d — определенная для всех значений ее аргументов в области $t \geqslant 0$, «мало», в некотором смысле, отклоняется от нуля, причем $d\,(0, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0$. Пусть $\lambda_i = \lambda_i\,(a_1, \ldots, a_n)$ — корни соответствующего алгебраического уравнения

$$\lambda^n - \sum_{i=1}^{n} a_i\,(t)\,\lambda^{i-1} = 0 \qquad (2)$$

и $Z_k^{(n)}$ — множество пространства $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$, состоящее из точек $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых имеется ровно k корней λ_i, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i\,(a_1, \ldots, a_n) \leqslant 0$. Данная система функций $a_1 = a_1\,(t), \ldots, a_n = a_n\,(t)$ представляет собой некоторую кривую K пространства E.

Автор высказывает гипотезу: для того, чтобы уравнение (1), при $d \equiv 0$ или d достаточно малом имело в точности k — параметрическое семейство E_k решений $x\,(t)$, удовлетворяющих при всяком $\varepsilon > 0$ условиям:

$$\lim_{t \to +\infty} x\,(t) \exp\,(-\varepsilon t) = 0 \qquad (3)$$

достаточно, чтобы $K \subset Z_{ki}^{(n)}$, где $Z_{ki}^{(n)}$ — множество внутренних точек $Z_k^{(n)}$. На примерах показано, что если $K \subset Z_{kf}^{(n)}$, где $Z_{kf}^{(n)}$ — граница множества $Z_k^{(n)}$, то семейство E_k может не существовать.

Для того, чтобы уравнение (1) имело k — параметрическое семейство B_k ограниченных решений, или k — параметрическое семейство O_k решений этого уравнения состояло из решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ требуются более сильные условия. Семейства B_k и O_k можно определять также по отношению к монотонным сравнительным функциям $\varphi\,(\varepsilon, t)$, требуя, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ произведение

$$x\,(t) \exp\,[-\varphi\,(\varepsilon, t)]$$

было бы, соответственно, ограниченным или стремилось к нулю при $t \to +\infty$.

Доказаны асимптотические теоремы для линейного уравнения (1) первого порядка $(n = 1,\ d \equiv 0)$ и даны их обобщения. В частности, пусть

$$\dot{x} = [a\,(t) + b\,(t)]\,x + f\,(t), \qquad (4)$$

где

$$1)\quad \overline{\lim}_{t \to +\infty}\, a\,(t) \leqslant 0;$$

$$2)\quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b\,(t)\,dt = 0;$$

$$3)\quad \int_0^{+\infty} |f\,(t)| \exp\,(-\varepsilon t)\,dt \leqslant M_\varepsilon$$

(при любом $\varepsilon > 0$). Тогда для решения $x\,(t)$ уравнения (4), при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место свойство (3).

Библ. 36 назв. Б. П. Демидович

6359. **Асимптотические свойства систем обыкновенных почти линейных дифференциальных уравнений. Татаркевич** (Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires presque linéaires. Tatarkiewicz Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1954 (1956), A8, 25—69 (франц.; рез. русск., польск.)

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} - Ax = g_1\,(x, t) + g_2\,(x, t) + f\,(t), \qquad (1)$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор-функция, A — постоянная матрица, $g_i(x, t)$ $(i=1, 2)$, $f(t)$ — непрерывные при $t \geqslant T_0$, $|x|<+\infty$ вектор-функции такие, что $g_i(0, t) \equiv 0$, причем выполнены условия Липшица: $|g_i(x, t)-g_i(\bar{x}, t)| \leqslant \gamma_i(t)|x-\bar{x}|$, где $\lim_{t\to+\infty}\gamma_1(t)=0$ и $\int_{T_0}^{+\infty}\gamma_2(t)\,dt<+\infty$. Пусть $\bar{\rho}_1<\bar{\rho}_2<\ldots<\bar{\rho}_q$ $(q\leqslant n)$ — упорядоченное множество всех различных действительных частей корней уравнения

$$\det(A-\lambda E)=0, \tag{2}$$

и $\bar{\rho}_0<\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_{q+1}=+\infty$. Обозначим через m — максимальное число корней λ_i характеристического уравнения (2) (считая их кратности) таких, что $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant \bar{\rho}_s$ $(s=0, 1, \ldots, q)$. Непрерывная функция $\varphi(\varepsilon, t)$ $(0<\varepsilon<\Delta, T_0 \leqslant t<+\infty)$ называется сравнительной функцией системы (1) (fonction de comparaison) порядка m, если: 1) $\varphi(\varepsilon, t)$ — неубывающая относительно ε; 2) для всякого $\varepsilon \in (0, \Delta)$ существуют постоянные β_ε и γ_ε такие, что

$$\bar{\rho}_0<\beta_\varepsilon \leqslant \frac{\varphi(\varepsilon, t_1)-\varphi(\varepsilon, t_2)}{t_1-t_2} \leqslant \gamma_\varepsilon<\bar{\rho}_{s+1}$$

при $t_1 \neq t_2$ и $t_1, t_2 \geqslant T_0$; 3) если $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$, то $\beta_{\varepsilon_1} \leqslant \beta_{\varepsilon_2}$ и $\gamma_{\varepsilon_2} \leqslant \gamma_{\varepsilon_1}$. В частности, можно положить $\varphi(\varepsilon, t)=(\rho+\varepsilon)t$.

Если, сверх того,

$$\lim_{t\to+\infty}[\varphi(\varepsilon, t)-\varphi(\varepsilon/2, t)]=+\infty \tag{3}$$

(на стр. 68 вместо $+\infty$ написано 0), то $\varphi(t, \varepsilon)$ называется сильно сравнительной функцией (fonction de forte comparaison) порядка m.

Теорема. Если $\varphi(\varepsilon, t)$ — сравнительная функция порядка m системы (1) и $\varepsilon \in (0, \Delta)$, то для системы (1) существует m-параметрическое семейство E_m решений $x(t)$ такое, что произведение

$$|x(t)| \exp[-\varphi(\varepsilon, t)] \tag{4}$$

ограничено при $x(t) \in E_m$ и неограничено при $x(t) \overline{\in} E_m$.

Если, кроме того, для функции $\varphi(\varepsilon, t)$ выполнено условие (3), то имеется в точности m-параметрическое семейство O_m решений $x(t)$ системы (1) таких, что произведение (4) стремится к нулю при $t\to+\infty$ и всяком $\varepsilon \in (0, \Delta)$.

Доказательство проводится методом последовательных приближений в форме Каке-Фукса.

Даются некоторые обобщения теорем А и Б. В частности, доказывается, что теорема Перрона об ограниченных решениях линейных систем и дифференциальных уравнений и теорема Пейовича (Peyovitch) о порядке роста решений линейных систем являются следствиями теорем А и Б. Разбирается также вопрос о существовании нормальных, в смысле Ляпунова, фундаментальных систем решений уравнения (1), где $f(t) \equiv 0$. Библ. 17 назв. Б. П. Демидович

6360. Совпадение центральных дисперсий 1-го и 2-го рода, соответствующих дифференциальному уравнению второго порядка $y''=Q(x)y$. Лайтох Мирослав, Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 3, 365—380 (рез. нем.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''=Q(t)\,y \tag{1}$$

с непрерывными $Q(t)<0$ при $t \in (a, b)$ и такое, что для всякого $x \in (a, b)$ левее и правее имеется бесконечное множество корней решения $y=y(t)$. Пусть A — множество решений уравнения (1), обращающихся в нуль при $t=x$, а B — множество решений того же уравнения, производная которых обращается в нуль при том же x. Ссылаясь на работу О. Борувка (РЖМат, 1956, 406), автор приводит определения основных центральных дисперсий 1-го и 2-го рода как функций от x, дающих соответственно абсциссы следующего правого корня интеграла множества A или следующего правого корня производной интеграла множества B. Эти функции обозначаются соответственно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Изучаются условия, при которых $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. Доказывается, что это возможно в том и только в том случае, когда $\varphi(x)=kx+d$, причем если $Q(x)<0$ и непрерывна

при $x \in (-\infty, +\infty)$, то обязательно $k=1$ и $d>0$
при $x \in (-\infty, l)$ " " $0<k<1$ и $d=-l(k-1)$,
при $x \in (l, \infty)$ " " $k>1$ и $d=-l(k-1)$.

Заканчивается работа формулировкой следствия представимости решений (1) по Болю (Crelle journ., 1906, **136**, 268): Для того чтобы $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv x+d$ для всех x, необходимо и достаточно существование $F(x)>0$, для которой $F(x+d)-F(x)=1$; $F'(x)>0$; $Q(x)=-\pi^2F^2(x)+3F''^2(x)/4F'^2(x)-F'''(x)/2F'(x)$.

М. И. Ельшин

6361. Интегральное представление для самосопряженных краевых задач (включающих естественные спектральные проблемы). Леман (Eine Integraldarstellung für selbstadjungierte Randwertaufgaben (einschließlich einer Theorie der natürlichen Eigenwertprobleme). Lehmann N. Joachim), Math. Nachr., 1955, **14**, № 3, 129—156 (нем.)

Изучается самосопряженная краевая задача вида

$$M(y)=\lambda N(y)+F(x),$$
$$W_\mu(y)=0 \quad (\mu=1, 2, \ldots, k \leqslant 2m), \tag{1}$$
$$R_\mu^M(y)=\lambda R_\mu^N(y) \quad (\mu=k+1, \ldots, 2m),$$

где

$$M(y)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu[m_\nu(x)\,y^{(\nu)}]^{(\nu)},$$

$$N(y)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu[n_\nu(x)\,y^{(\nu)}]^{(\nu)},$$

$m>n$; $m_\nu(x)$, $n_\nu(x) \in C^\nu[a, b]$; $[a, b]$ — конечный интервал; $m_m(x)>0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$; W_μ, R_μ^M, R_μ^N — граничные функционалы, причем порядок граничных производных, входящих в W_μ, не выше, чем $m-1$. Доказывается эквивалентность задачи (1) интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x)=\lambda\big(G(x, s),\ y(s)\big)+f(x), \tag{2}$$

где билинейная форма, стоящая справа, определяется равенством

$$(u, v)=\sum_{\nu=0}^{n}\int_a^b n_\nu(x)\,u^{(\nu)}(x)\,v^{(\nu)}(x)\,dx+$$
$$+\mathfrak{x}'(u)\,\mathfrak{N}\mathfrak{x}_\xi(v), \tag{3}$$

$\mathfrak{x}(u)\big(u(a),\ u'(a), \ldots, u^{(n-1)}(a),\ u(b),\ u'(b), \ldots, u^{(n-1)}(b)\big)$; $\mathfrak{N}=(n_{ik})$ — симметрическая матрица; $G(x, s)$ — функция Грина самосопряженной задачи

$$M(y)=r(x),$$

$$W_\mu(y)=0 \quad (\mu=1, 2, \ldots, k\leqslant 2m),$$

$$R_\mu^M(y)=0 \quad (\mu=k+1, \ldots, 2m).$$

Первые k граничных условий это так называемые существенные (Камке) или главные (М. Г. Крейн) граничные условия. Вводится в рассмотрение билинейная форма

$$(uMv)=\sum_{\nu=0}^{m}\int_a^b m_\nu u^{(\nu)}v^{(\nu)}\,dx+\mathfrak{x}'(u)\,\mathfrak{M}\mathfrak{x}(u), \qquad (4)$$

$\mathfrak{M}$ — симметрическая матрица порядка $2m$. В силу допущения $m_m(x)>0$, форма (uMv) полуограничена снизу. Далее изучается M-определенная задача (1), т. е. предполагается, что форма (uMv) существенно положительно определенная: $(uMu)>0$ (для всех $u\in W_M$, $u\not\equiv 0$), где W_M — совокупность функций, которые имеют непрерывные производные до $m-1$-го порядка включительно, кусочно-непрерывные производные m-го порядка и которые удовлетворяют главным граничным условиям.

Через D_0 обозначается многообразие решений задачи

$$N(d)=0, \quad W_\mu(d)=0 \quad (\mu=1, 2, \ldots, k),$$

$$R_\mu^N(d)=0 \quad (\mu=k+1, \ldots, 2m).$$

Доказываются теоремы о разложениях по собственным функциям для функции Грина $G(x, s)$, резольвенты $R(x, s; \lambda)$ и для любой функции $u(x)\in W_M$. Последняя из перечисленных теорем гласит: Какова бы ни была функция $u(x)\in W_M$, имеют место разложения:

$$u^{(k)}(x)=\sum_\nu c_\nu y_\nu^{(k)}(x)+d_0^{(k)}(x) \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1).$$

Каждый из рядов сходится равномерно в интервале $[a, b]$. При этом $d_0(x)\in D_0$, а $\ldots y_{-2}, y_{-1}, y_1, y_2 \ldots$ есть собственные функции задачи $y=\lambda(G(x, s), y(s))$, отвечающие собственным значениям

$$\ldots \lambda_{-2}\leqslant\lambda_{-1}<(0)<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$$

Устанавливаются экстремальные свойства собственных значений. Так, например, для положительных собственных значений справедливо

$$\min_{C_{i-1}}\sup_{u\in W_M\cap C_{i-1}}\frac{(u, u)}{(uMu)}=\frac{1}{\lambda_i} \quad (i=1, 2, \ldots).$$

$C_1\supset C_2\supset\ldots$ — последовательность вложенных подпространств некоторого пространства C_0.

Аналогичные результаты получаются также и для N-дефинитных задач, т. е. для тех случаев, когда форма (3) определяется.

Задача (1) при $R_\mu^N=0$ $(\mu=k+1, \ldots, 2m)$, т. е. когда граничные условия не содержат параметра λ, рассматривалась Камке (Kamke E., Math. Z., 1940, 46, 251—286; 1942/43, 48, 67—100). Краевые задачи, связанные с парой дифференциальных операторов при довольно общих предположениях, рассматривались референтом (Диссертация, 1951; см. также РЖМат, 1956, 4645). В работе при доказательстве ряда предложений отсутствуют ссылки на статью М. Г. Крейна (Матем. сб., 1947, 21(63) 365—404), в которой приведены доказательства этих утверждений.

Л. С. Дашниц

6362. Заметка о нелинейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Уц (A note on second-order nonlinear differential equations. Utz W. R.) Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1047—1048 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$x''+\alpha(x)x'+\beta(x)x=0 \qquad (1)$$

и уравнение

$$x''+g(x')+cx=0 \qquad (2)$$

Доказывается следующая

Теорема: $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — действительные функции, удовлетворяющие при всех x неравенствам $\alpha(x)\leqslant 0$, $\beta(x)>0$. Тогда решение $x(t)$ уравнения (1) при всех достаточно больших t или колеблется, или монотонно. В последнем случае если оно возрастает, то $\lim_{t\to\infty}x(t)>0$, если же убывает, то $\lim_{t\to\infty}x(t)<0$. Из теоремы выводится следствие: Если постоянная $c>0$ и $g(0)=0$, кроме того, при всех z $g'(z)\leqslant 0$, то решение $x(t)$ уравнения (2) при всех достаточно больших t или колеблется, или $\lim_{t\to\infty}x(t)=\infty$, или $\lim_{t\to\infty}x(t)=-\infty$. А. Н. Черкасов

6363. Метод возмущений при исследовании уравнений Колмогорова. Хилле (Perturbation methods in the study of Kolmogoroff's equations. Hille Einar), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954. Vol. 3. Groningen-Amsterdam, 1956, 365—376 (англ.)

Изучается задача

$$y'(t)=Ay, \ t>0; \ y(0)=I, \qquad (1)$$

где $A=(a_{jk})$ — матрица Колмогорова, т. е. матрица, удовлетворяющая условиям: $a_{jk}\geqslant 0$, $j\neq k$; $a_{jj}\leqslant 0$; $\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\leqslant 0$; $j, k=1, 2, 3, \ldots$ Под решением задачи (1) понимается решение $y(t)=(y_{jk}(t))$ бесконечной системы уравнений $y'_{jk}(t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_{jm}y_{mk}(t)$, удовлетворяющее начальному условию в слабом смысле: $\lim_{t\to 0+}y_{jk}(t)=\delta_{jk}$, $j, k=1, 2, 3\ldots$ Матрица A разбивается на части $D=(\delta_{jk}a_{jk})$ и $T=((1-\delta_{jk})a_{jk})$, и решение задачи (1) сводится к решению интегрального уравнения

$$Y(t)=E(t)+\int_0^t E(t-s)TY(s)\,ds, \qquad (2)$$

где $E(t)$ есть решение задачи $Y'(t)-DY(t)=0$, $Y(0)=I$.

Найденное методом последовательных приближений при $Y_0(t)=0$ решение $P(t)$ уравнения (2) является решением задачи (1) и

$$\|P(t)\|\equiv\sup_j\sum_{k=1}^{\infty}|p_{jk}(t)|\leqslant 1.$$

Если в множество матриц ввести частичную упорядоченность, полагая $A<B$ при $a_{jk}\leqslant b_{jk}$, $j, k=1, 2, 3, \ldots$, то окажется, что $P(t)$ является минимальным положительным решением (1). С помощью этого устанавливается полугрупповое свойство: $P(t+s)=P(t)\cdot P(s)$, $0<t, s<\infty$, и показывается, что $P(t)$ является минимальным положительным решением сопряженной задачи $Z'(t)=Z(t)A$, $Z(0)=I$.

Тем же методом проводится исследование задач — $\frac{\partial}{\partial s}Y(s, t)=A(s)Y(s, t)$, $s<t$, $Y(t, t)=I$ и $\frac{\partial}{\partial t}Z(s, t)=Z(s, t)A(t)$, $s>t$, $Z(s, s)=I$. Доказывается существование их общего минимального решения $P(s, t)$, $\|P(s, t)\|\leqslant 1$, которое удовлетворяет уравнению Чапмана—Колмогорова $P(s, t)=P(s, u)P(u, t)$, $s\leqslant u\leqslant t$.

Вторая часть работы посвящена вопросам существования нетривиального нулевого решения, т. е. вопросам неединственности. Решение $Y(t)$ уравнения $Y'(t) = AY(t)$ называется сильным нетривиальным нулевым решением, если $Y(t) \not\equiv 0$ и $\lim_{t\to 0+} \|Y(t)\| = 0$. Для того чтобы существовало сильное нетривиальное нулевое решение, удовлетворяющее условию $\limsup_{t\to\infty} t^{-1} \times \times \log \|Y(t)\| \leqslant \omega$, необходимо и достаточно, чтобы существовала определенная, голоморфная и ограниченная по норме в полуплоскости $R(\lambda) \geqslant \omega + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, матрица $x(\lambda) \not\equiv 0$, удовлетворяющая уравнению

$$Ax(\lambda) = \lambda x(\lambda). \qquad (3)$$

Положительное сильное нетривиальное нулевое решение существует тогда и только тогда, когда среди решений уравнения (3) существует матрица с абсолютно монотонными членами на действительной оси при $\lambda > \omega$.

Аналогично исследуется сопряженное уравнение.

Наконец, в последней части работы показывается, что если уравнение $Z'(t) = Z(t)\,U$ с колмогоровской матрицей U имеет сильное нетривиальное нулевое решение, то уравнение $Q'(t) = Q(t)\,(U + V)$ также обладает этим свойством, если V — колмогоровская матрица с ограниченной нормой. Указываются некоторые обобщения этого утверждения.

П. Е. Соболевский

6364. Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях. Маслов В. П., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 3, 531—534

В гильбертовом пространстве H рассматриваются линейные операторы T с областью определения $D(T)$ и областью значений $R(T)$. Последовательность операторов T_n называется вполне сильно сходящейся к оператору T $(T_n \to T)$, если: 1) общая область определения D всех T_n и общая область определения D^* всех T^* всюду плотны в H; 2) $\{T_n f\}$ и $\{T_n^* f^*\}$ сильно сходятся при $n \to \infty$ для всех $f \subset D$ и $f^* \subset D^*$; 3) T и T^* суть соответственно замыкания $\lim T_n$ и $\lim T_n^*$.

Теорема 1. Пусть $T_n \to T$, $f_n \to f$ (слабая сходимость) $f_n \subset R(T_n)$, $f \subset R(T)$ и u_n есть некоторая ограниченная в совокупности последовательность решений уравнений $T_n u_n = f_n$. Тогда найдутся v_n, удовлетворяющие при каждом n уравнению $Tv_n = f$, и такие, что $u_n - v_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Автор утверждает, что из этой теоремы следуют различные известные уже теоремы о поведении решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.

Из аналогичных теорем, формулируемых в терминах функционального анализа, автор получает предельные теоремы для дифференциальных уравнений 2-го порядка 1) гиперболического типа с малыми параметрами при производных по пространственным переменным и 2) (n-мерного) эллиптического типа, не содержащего производных первого порядка и с малыми параметрами при производных 2-го порядка.

В качестве следствия теоремы 1 автор получает следующую теорему:

Теорема 2. Предположим, что в уравнении

$$\varepsilon y^{(n)} + a_k(x)\,y^{(k)} + \ldots + a_0(x)\,y = f(\varepsilon, x), \qquad (1)$$

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-1)}(a) = 0, \quad a_n(x) \not\equiv 0,$$

$n - k$ нечетно,

i-й коэффициент i раз дифференцируем, $\int_a^b y^4(x, \varepsilon)\,dx$ равномерно ограничено по ε. Тогда $y(x, \varepsilon)$ будет сходиться в среднем на $[a, b]$ к решению вырожденного уравнения с нулевыми начальными условиями.

В конце статьи автор касается вопроса об аналитичности по ε решений уравнения $A(\varepsilon)\,x_\varepsilon = f_\varepsilon$ (A_ε — оператор, аналитически зависящий от ε).

Примечание. Общее решение уравнения (1) в виде асимптотического ряда по ε было дано Нуайоном в 1912 г. И. С. Градштейн

6365. О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в банаховых пространствах. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Соболевский П. Е., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 1, 19—22

Изучается задача Коши

$$dx/dt = A(t)\,x + f(t, x), \quad t > 0, \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0, \qquad (2)$$

где $A(t)$ — замкнутый оператор из банахова пространства E в E, производящий сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов $T(\xi, t)$ $(\xi > 0)$ и $x_0 \in D(A(0))$ ($D(A)$ — область определения оператора A). Если $A(t) = A$ не зависит от t, то утверждается, что оператор $Q\,x(t) = \int_0^t T(t - \tau)\,x(\tau)\,d\tau$ действует и непрерывен в пространстве C_L функций, удовлетворяющих условию Липшица. Если полугруппа $T(\xi)$ равномерно непрерывна при $\xi > 0$, то Q отображает пространство C_L в пространство C_1 непрерывно дифференцируемых функций (со значениями в E), и непрерывен в соответствующих топологиях. При этом, если $f(t, x) = f(t)$ — непрерывная функция с сильно ограниченной вариацией, то $x(t) = T(t)\,x_0 + Qf(t)$ есть решение задачи (1), (2). Кроме того, из полной непрерывности A^{-1} вытекает полная непрерывность Q, как оператора из C_L в C.

Если оператор $C(t) = A(t)\,\frac{d}{dt}\,A^{-1}(t)$ ограничен и сильно непрерывен по t (условие (α)), то: 1) $D(A(t))$ не зависит от t, 2) $B(t, s) = A(t)\,A^{-1}(s)$ — равномерно непрерывен по (t, s) и 3) $\partial B(t, s)/\partial t$ — сильно непрерывен по t при каждом s. Наоборот, из 1) и 3) вытекает (α). Пусть выполнено условие $\|(\beta - A(t))^{-1}\| \leqslant 1/(1 + \beta)$, $\beta > -1$ (условие (*)). Пусть $U(t, s)\,x_0$ решение уравнения (1), при $f(t, x) \equiv 0$ и начальном условии $x(s) = x_0$. Положим

$$\hat{Q}f(t) = \int_0^t U(t, s)\,f(s)\,ds.$$

Если $f(t)$ непрерывно дифференцируема, выполнены условия (α) и (*), то $U(t, 0)\,x_0 + \hat{Q}f(t)$ есть решение задачи (1), (2) при $f(x, t) = f(t)$. Оператор $\hat{Q}$ из C_1 в C_1 непрерывен. Справедливы соотношения: $\int_\alpha^\beta U(t, s) \times \times A(s)\,ds = U(t, \alpha)\,x - U(t, \beta)\,x$ и $\frac{d}{ds}\,U(t, s)\,x = = -U(t, s)\,A(s)\,x$, $x \in D(A)$.

В нелинейном случае, обобщенными решениями задачи (1), (2) называются решения уравнения $x(t) = = U(t, 0)\,x_0 + \hat{Q}f(t, x(t))$. Пусть $S_r = \{x : \|x - x_0\| < r\}$, $\Delta_a = \{t : (0 \leqslant t \leqslant a)\}$. Пусть $f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x)$, где f_1 и f_2 непрерывны на $\Delta_a \times S_r$, причем f_1 — вполне непрерывен, а f_2 удовлетворяет условию Липшица. Если выполнены условия (α) и (*) или $A(t)$ не зависит от t, то при достаточно малых t существует обобщенное решение задачи (1), (2). Если $f(t, x)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости, то обобщенное решение является обычным.

Указаны примеры задач для уравнений в частных производных, допускающих решение с помощью метода, развитого авторами. В. Э. Лянце

6366. Об устойчивости механических систем. Стокер (On the stability of mechanical systems. Stoker J. J.), Trans. Sympos. Appl. Math., 1954. 2. New York—London, 1955. 133—141 (англ.)

Перепечатано из ж-ла «Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 1 (см. РЖМат, 1956, 3037).

6367 К. Математический анализ. Дифференциальные уравнения. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. **Егорова И. А.** Ленингр. гос. пед. ин-т., Л., 1956, III стр., илл.

6368 К. Введение в теорию нелинейных и квазигармоничных колебаний механических систем. Пуст, Тондл (Úvod do theorie nelinearních a kvasiharmonických kmitů mechanických soustav. Půst Ladislav, Tondl Aleš. Praha, CSAC, 1956, 174s., ill. 19, 70 Kčs) (чешск.)

Книга знакомит читателей с результатами теории нелинейных и квазигармоничных систем. Дан лишь краткий набросок отдельных методов, но зато указываются возможности применения того или другого метода к различным проблемам механических систем.

Книга состоит из двух частей. Автором первой из них является Пуст. Он исследует системы, описанные уравнением

$$\ddot{y} + ky + cy + f(y, \dot{y}) = F(t),$$

где $f(y, \dot{y})$ — аналитическая функция, достаточно малая по отношению к выражению $ky + cy$; $F(t)$ может являться суммой нескольких гармонических составляющих. Исследование колебаний таких систем сводится к нахождению периодических решений указанного дифференциального уравнения. Важнейшие из приведенных методов следующие: метод малого параметра Пуанкаре, метод Крылова и Боголюбова, метод Ван-дер-Поля, метод эквивалентной линеаризации, метод Дуфинга (Duffing), метод Раушера (Rauscher) и др. В конце этой части исследуются собственные и самовозбужденные колебания с точки зрения орбитной устойчивости и вынужденные колебания с точки зрения устойчивости по Ляпунову.

Автором второй части является Тондл. Он исследует системы, описанные дифференциальным уравнением Хилла. Более подробно разбирается дифференциальное уравнение Матьё. Приводятся различные методы приближенного решения и нахождения областей устойчивости этого уравнения. Также исследуется здесь и более общее уравнение

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + (\lambda + \gamma\cos t)\, y = F(\nu, t),$$

где $F(\nu, t)$ — периодическая функция от t с частотой ν.

В заключение показано применение перечисленных методов в некоторых важных конкретных случаях, например: система с периодически переменной жесткостью, возбуждаемая внешней силой, динамическая устойчивость прута, нагруженного периодически переменной осевой силой, и крутильные колебания коленчатых валов. I. Vrkoč

6369 Д. Об условной устойчивости седловых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае. Ши Гуан. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

6370. Решение задачи Коши для некоторых функциональных уравнений. Персидский К. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 21—24

Обобщаются системы

$$\frac{\partial v_j(t; x_1, \ldots, x_m)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v_j(t; x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_k} \times$$

$$\times f_k(t; x_1, \ldots, x_m) = \varphi_j(t; x_1, \ldots, x_m) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

на тот случай, когда переменные $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ пробегают не конечномерные, а произвольные линейные нормированные пространства N и M. Именно, рассматривается уравнение вида

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [v(t + \Delta t; x + \Delta t f(t; x)) - v(t; x)] = \varphi(t; x),$$

где $v(t; x)$ — искомая функция от вещественной переменной t и переменной $x \in M$; значения $v(t; x)$ принадлежит N; $f(t; x)$ и $\varphi(t; x)$ — заданные функции. Исследуется задача Коши для этого уравнения, т. е. задача нахождения $v(t; x)$ по $v(0; x)$. При некоторых условиях гладкости на f и φ устанавливается существование решения и его единственность. Аналогичные вопросы рассматриваются и для того случая, когда f и φ дополнительно зависят от искомой функции v. Ю. М. Березанский

6371. О задаче Коши для уравнений эллиптического типа с двумя переменными. Фояш, Гусси, Поенару (Asupra problemei lui Cauchy pentru tipul eliptic. Foiaș Ciprian, Gussi George, Poenaru Valentin), Bul. științ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. și fiz., 1955, 7, № 1, 97—103 (рум.; рез. франц., русск.)

Авторы показывают, что задача Коши для уравнения Лапласа эллиптического типа для двух переменных некорректна, как это видно на известном примере Адамара. Рассматривая задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u),$$

авторы доказывают, что решение, рассматриваемое даже только в действительной области, зависит от значений начальных данных в комплексном поле. Аналогично показано, что и для уравнения $\Delta^2 u = f(x, y, u)$ задача Коши некорректна. Е. С. Алексеев

6372. Теоретико-функциональные свойства некоторых эллиптических систем линейных уравнений первого порядка. Дуглис (Function-theoretic properties of certain elliptic systems of first-order linear equations. Douglis Avron), Lect. Funct. Complex Variable. Ann Arbor, Univ. Michigan Press, 1955, 335—340 (англ.)

Сокращенное изложение ранее опубликованной работы автора (РЖМат, 1954, 2149). Библ. 3 назв. В. С. Федоров

6373. Средние значения гармонических функций по гомотетичным кривым. Грин (Mean values of harmonic functions on homothetic curves. Green John W.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 2, 279—282 (англ.)

Дается обращение теоремы о среднем значении для гармонических функций двух переменных в следующей формулировке. Пусть D — плоская область, содержащая начало координат и ограниченная гладкой замкнутой жордановой кривой C: D_λ — область, полученная из D преобразованием $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ $(0 < \lambda < 1)$, C_λ — граница области D_λ. Если средние значения по C_λ (или по D_λ) для любой функции $U(P)$, гармонической в D и непрерывной в замыкании D, постоянны при всех λ, то область D является кругом. Ю. А. Шашкин

6374. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа. **Мергелян С. Н.**, Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 3—26

Рассматривается следующая задача: две произвольные непрерывные функции $f_1(P)$, $f_2(P)$, заданные на гладком гомеоморфе круга σ, требуется аппроксимировать соответственно гармонической функцией H и ее нормальной производной $\frac{\partial}{\partial n}H$. Функция H гармонична в некоторой пространственной области, содержащей σ. Доказаны следующие теоремы, характеризующие скорость указанной аппроксимации. Пусть $\gamma(\delta)$ — верхняя грань между углами, которые составляют между собой нормали к σ в точках P_1, P_2, и

$$\omega(\delta) = \max_{i=1,2} \sup |f_i(P_1) - f_i(P_2)|$$

по всем $P_1, P_2 \in \sigma$, $|P_1, P_2| \leqslant \delta$.

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует гармонический полином от x, y, z степени m, удовлетворяющий неравенству

$$\max_{P\in\sigma} |f_1(P) - H_m(P)| + \max |f_2(P) - \frac{\partial}{\partial n} H_m(P)| \leqslant$$
$$\leqslant C_\varepsilon\, \omega\left[\gamma^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{m^{1-\varepsilon}}\right)\right].$$

Теорема 2. Для любой сферы $|PO| = R$, содержащей σ, и произвольного $M > 0$ существует гармоническая в шаре $|PO| \leqslant R$ функция $H(P)$ с условиями:

$$\max_{P\in\sigma} |f_1(P) - H(P)| + \max \left| f_2(P) - \frac{\partial}{\partial n} H(P)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\omega\left[\gamma^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{\ln M^{1-\varepsilon}}\right)\right];\ \max |H(P)| \leqslant M,$$

где C зависит от ε и R. В этом неравенстве правую часть нельзя заменить для произвольных ω и γ на $o\left\{\omega\left[\gamma\left(\frac{1}{\ln M}\right)\right]\right\}$.

В процессе доказательства производится построение аппроксимирующих функций и тем самым дается метод приближенного решения задачи Коши для уравнения Лапласа.

Далее аналогичная задача рассматривается для случая замкнутой поверхности σ. В этом случае мерой отклонений данных Коши служит взвешенная разность между ними. Доказывается следующая теорема. Пусть σ — гладкий гомеоморф сферы и $h(Q)$ — определенная на σ неотрицательная ограниченная функция.

Теорема 4. Если вблизи фиксированной точки Q_0:

$$h(Q) < \exp\left\{-\frac{1}{|Q, Q_0|^p}\right\},\ Q \in \sigma,$$

то при $p > 2$ аппроксимация (h) возможна и для любого $\nu > 0$, $M > 1$ можно указать гармоническую в сфере $|PO| \leqslant R$ функцию $H(P)$, удовлетворяющую неравенствам

$$\max_\sigma h(Q)\,|f_1(Q) - H(Q)| + \max_\sigma h(Q)\,|f_2(Q) - \frac{\partial}{\partial n}H(Q)| <$$
$$< C_\nu \omega\left[\gamma^{1-\nu}\left(\frac{1}{(\ln M)^{\frac{p-2}{p}-\nu}}\right)\right],$$
$$\max |H(P)| \leqslant M.$$

В заключение установлена следующая теорема, являющаяся обобщением классической теоремы единственности задачи Коши для уравнения Лапласа:

Теорема 6. Если функция $U(P)$ гармонична в единичной сфере $|PO| \leqslant 1$, непрерывна вместе с частными производными первого порядка и на границе сферы вблизи некоторой точки P_0, $|P_0O| = 1$ удовлетворяет неравенству

$$|U(P)| + \left|\frac{\partial}{\partial n} U(P)\right| < \exp\left\{-\frac{1}{|PP_0|^{2+\delta}}\right\},\ \delta > 0,$$

то $U(P) = 0$.

М. М. Лаврентьев

6375. Аксиоматическое изучение проблемы Дирихле. **Брело** (Étude axiomatique du problème de Dirichlet. Brelot Marcel), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 3, 327—329 (франц.)

Обобщается аксиоматика из совместной работы автора и Шоке (Brelot, Choquet, Ann. Inst. Fourier, 1951, 3, 199—263). В снабженном метрикой пространстве Грина (РЖМат, 1956, 7306) фиксируется положительная гармоническая функция h (в цитированной работе было $h = 1$). Пусть $\breve{\Omega}$ есть метрическое пополнение пространства Ω, и на границе Ω, т. е. на множестве $\Gamma = \breve{\Omega} - \Omega$, задана действительная функция f. Рассматриваются ограниченные сверху субгармонические функции u в пространстве Ω (быть может, равные $-\infty$), для которых в каждой точке границы $\overline{\lim}\,(u/h) \leqslant f$. Верхняя грань таких функций f есть гармоническая функция, обозначаемая через $\mathscr{H}_{f,h}$ (быть может, равная $+\infty$ или $-\infty$). Полагаем $\mathscr{H}_{f,h} = -\mathscr{H}_{f,h}$. Приводятся аксиомы, при выполнении которых $\underline{\mathscr{H}}_{f,h} \leqslant \overline{\mathscr{H}}_{f,h}$, а для непрерывных ограниченных функций $\underline{\mathscr{H}}_{f,h} = \overline{\mathscr{H}}_{f,h} (= \mathscr{H}_{f,h}(P))$, что при фиксированной точке $P \in \Omega$ определяет на множестве Γ некоторую меру $d\breve{\mu}_h^P$. Если Ω погружено в качестве всюду плотного подпространства в метризуемый компакт $\overline{\Omega}$, то аналогично построенные функции $\underline{\mathscr{P}}_{f,h}$ и $\overline{\mathscr{P}}_{f,h}$ определяют меру $d\mu_h^P$ на множестве $\overline{\Omega} - \Omega$, причем вышеупомянутые аксиомы заменяются аксиомой $\mathscr{A}_h$, состоящей в том, что всякая конечная непрерывная функция f h-резолютивна, т. е. для нее $\underline{\mathscr{P}}_{f,h} = \overline{\mathscr{P}}_{f,h}$ (что означает разрешимость проблемы Дирихле). Произвольная функция f будет h-резолютивна тогда и только тогда, когда она $d\mu_h^P$-суммируема (что не зависит от положения точки P), при этом $\underline{\mathscr{P}}_{f,h} = \overline{\mathscr{P}}_{f,h} = \mathscr{P}_{f,h}(P) = \int f d\mu_h^P$. Если $\Omega \subset \breve{\Omega} \subset \overline{\Omega}$, то из вышеупомянутых аксиом для пополнения $\breve{\Omega}$ вытекает аксиома $\mathscr{A}_h$ для компакта $\overline{\Omega}$, причем мера $d\mu_h^P$ на множестве $\overline{\Omega} - \Omega$ порождает меру $d\breve{\mu}_h^P$ на множестве $\breve{\Omega} - \Omega$, а множество $\overline{\Omega} - \breve{\Omega}$ h-пренебрегаемо, т. е. имеет $d\mu_h^P$-меру нуль. В работе изучается общий случай компактного пополнения и случай компактного пополнения в смысле Мартина (Martin R. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1941, 49, 137—172), когда существует предел отношения функций Грина $K(M, P) = G(M, P)/G(M, P_0)$ при $M \to Q$ (P_0 фиксировано, $Q \in \Gamma$ произвольно), причем предельная функция $K(Q, P)$ взаимно однозначно соответствует точкам Q.

М. Ф. Бокштейн

6376. О распределении особенностей потенциала. **Иванов В. К.**, Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 67—70

В работе рассмотрена следующая задача. В полуплоскости $y > 0$ распределены конечные массы, запол-

няющие конечную область. На прямой $y=0$ известна производная потенциала V_y. Требуется найти расстояние H от оси OX до множества особенностей внешнего потенциала V при его аналитическом продолжении внутрь масс. Результат выражается формулой

$$H=-\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\ln|v_1(r)|}{r},$$

где

$$v_1(r)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{irx}V_y(x,0)\,dx.$$

Аналогичная формула получена и для трехмерного пространства. М. М. Лаврентьев

6377. Распределение особенностей потенциала и пространственный аналог теоремы Пойа. Иванов В. К., Матем. сб., 1956, **40**, № 3, 319—338

В конечной области D, лежащей в полупространстве $z>0$ (полуплоскости $y>0$), распределена конечная масса. Внешний потенциал V этой массы продолжается как гармоническая функция внутрь области D. Автор находит расстояние H от плоскости $z=0$ (прямой $y=0$) до множества особенностей полученной таким образом гармонической функции, зная производную V_z (соответственно V_y) на плоскости $z=0$ (прямой $y=0$). Именно

$$H=-\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log|v_1(r)|}{r},\quad v_1(r)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{irx}V_y(x,0)\,dx$$

в плоском случае и

$$H=-\sup_{\psi}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log|v_1(r\cos\psi,r\sin\psi)|}{r},$$

$$v_1(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x\xi+y\eta)}V_z(x,y,0)\,dxdy$$

в пространстве.

При этом в плоском случае используется известная теорема Пойа из теории целых функций. Автор устанавливает аналог этой теоремы в пространстве в следующей форме. Характеристической функцией распределения масс называется $F(\mathbf{P})=F(p_1,p_2,p_3)=\int\int\int_D e^{p_1x+p_2y+p_3z}dM(x,y,z)$, где $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)$ — вектор с комплексными составляющими, причем $p_1^2+p_2^2+p_3^2=0$. Вектору $\mathbf{p}$ сопоставляются по определенному правилу число $\rho>0$ и три угла Эйлера φ_1, θ, φ_2. Тогда $F(\mathbf{p})=G(\rho,\varphi_1,\theta,\varphi_2)$. Если определить индикатрису роста функции $F(\mathbf{p})$ как

$$h(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=\overline{\lim}_{\rho\to\infty}\frac{\log|G(\rho,\varphi_1,\theta,\varphi_2)|}{\rho}$$

и обозначить через $K(\theta,\varphi)$ опорную функцию выпуклой оболочки множества особенностей внешнего потенциала V, то

$$K(\pi,0)=\sup_{\psi}h(\psi,\pi,0).$$

Общий случай теоремы получается отсюда вращением пространства. Ю. А. Шашкин

6378. Обобщенные решения эллиптических дифференциальных уравнений и их суммируемость в L_p. Кошелев А. И. Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 203

См. РЖМат, 1957, 4840

6379. Функция Грина для $\Delta\Delta$ и. Шульц-Грунов (Zu $\Delta\Delta u$ gehörende Greensche Funktionen. Schultz-Grunow F.), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, 2, № 3, 433—435 (нем.)

Строится для многоугольника бигармоническая функция Грина, удовлетворяющая граничным условиям и в угловых точках; с этой целью изучено поведение фундаментального решения в окрестности угловых точек. Г. Ф. Манджавидзе

6380. Применения аналитического продолжения к решению граничных задач. Гарабедян (Applications of analytic continuation to the solution of boundary value problems. Garabedian P. R.). J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 3, 383—393 (англ.)

Даются способы аналитического продолжения решений дифференциальных уравнений в частных производных ($\Delta u=u$, $\Delta\Delta u=2\Delta u_x$, $\Delta\Delta u=0$) через аналитические дуги. В качестве иллюстрации строится бигармоническая функция Грина для внешности эллипса (в частности, для плоскости с прямолинейным разрезом). Строится также бигармоническая функция Грина для области, ограниченной двумя дугами окружности. Г. Ф. Манджавидзе

6381. Об одном обобщении основной бигармонической задачи. Пини (Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale. Pini Bruno), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 196—213 (итал.)

D — односвязная конечная область плоскости (x,y), ограниченная контуром C с непрерывной кривизной; его уравнения, отнесенные к длине дуги, суть $x=\bar{x}(s)$, $y=\bar{y}(s)$; $0\leqslant s\leqslant l$. В пограничной полосе ширины δ области D рассматривается семейство кривых C_t, определяемых уравнениями

$$x=\bar{x}(s)-t\bar{y}'(s),\quad y=\bar{y}(s)+t\bar{x}'(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant\delta.$$

Ищется бигармоническая в D функция $u(x,y)$ по краевому условию

$$\lim_{t\to+0}\int_{C_t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial s_t}-f_1\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial t}-f_2\right|\right)ds_t=0;$$

$$f_1,\ f_2\in L^{(1)}(C).$$

Функция u определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое можно фиксировать, задав значение u в некоторой точке контура; функция $f_1(s)$ удовлетворяет необходимому условию $\int_C f_1(s)\,ds=0$.

В предположении, что решение $u(x,y)$ существует, выводится оценка

$$\int_{C_t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial s_t}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right)ds_t<\overline{H}\int_C(|f_1|+|f_2|)\,ds;$$

$$\overline{H}=\text{const}.$$

Вводится банахово пространство $\sum$ троек функций $(f(x,y),f_1(s),f_2(s))$, где $f\in L^{(2)}(D)$; f_1, $f_2\in L^{(1)}(C)$ и $\int_C f_1(s)\,ds=0$. Доказывается, что в $\sum$ плотно множество троек вида $(\Delta\Delta u,\ \partial u/\partial s,\ \partial u/\partial\nu)$, где ν — нормаль к C, $u\in C^{(1)}(D)$ и $\Delta\Delta u\in L^{(2)}(D)$. Отсюда вытекает существование последовательности $\{u_n(x,y)\}$, которую, как показывает автор, можно считать бигармонической и которая удовлетворяет соотношению

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_{C_t}\left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial s_t}-\frac{\partial u_m}{\partial s_t}\right|+\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}-\frac{\partial u_m}{\partial t}\right|\right)ds=0.$$

Доказывается, что эта последовательность равномерно сходится к решению поставленной задачи.
С. Г. Михлин

6382. Решение одной краевой задачи, встречающейся в теории движения влаги в почве. Москвичев А. Д. Тр. Куйбышевск. инж.-строит. ин-та, 1956, вып. 3, 299—301

6383. Результаты и предложения в математической теории дозвуковых и сверхзвуковых течений. Берс (Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows. Bers Lipman), Trans. Sympos. Appl. Math., 1953, 1, New York, 1954, 79—104 (англ.)

6384. Об одном частном решении уравнений плоских, цилиндрических и сферических волн. Гриб А. А., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 2, 225—227
См. РЖМех, 1956, 4258.

6385 К. Лекции об уравнениях с частными производными. Петровский (Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Petrowski I. G. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1955, 296 pp., 17.00 DM) (нем.)
Перевод 2-го русского издания (см. РЖМат, 1955, 3217 К)

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

6386. Об автоколебаниях, поддерживающихся импульсивно. Аймерих (Sulle oscillazioni autosostenute impulsivamente. Aymerich Giuseppe), Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1952, 22, 34—37 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)
Система дифференциальных уравнений $\dot{x} = -\varepsilon f(x) + y$, $\dot{y} = -w^2 x$, где $f(x) = 2\omega [x - x_0 \operatorname{sgn}(x)]$ описывает кусочно-линейное движение $x(t)$ точки под действием линейной восстанавливающей силы и линейного сопротивления, которое меняется скачком на постоянную величину при $x = 0$. Автор изучает это движение для малого ε при помощи незначительного изменения приближенного метода Крылова и Боголюбова (Введение в нелинейную механику) и получает результаты, по существу эквивалентные результатам Рокарда (Rocard Y., Dynamique générale des vibrations, Masson et C-ie, Paris, 1943).
W. Wasow

6387. Модуляция ширины фазы осциллятора Рокарда. Аймерих (Modulazione di ampiezza e di fase nell'oscillatore di Rocard. Aymerich G.), Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1953, 23, 165—174 (итал.)
Продолжая исследования, начатые в работе (РЖМат, 1956, 1397), автор доказывает существование соединенных колебаний для осциллятора Рокарда. Математически проблема состоит в установлении существования устойчивых периодических решений для системы

$$d\xi/dr = \xi/(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} - (\xi + \sigma\eta),$$

$$d\eta/dr = \eta/(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} - F + (\sigma + \xi - \eta),$$

где постоянные F и σ удовлетворяют неравенствам $F > 1$, $\sigma > 4F^2 - 1$. Доказательство использует теорему Бендиксона, которая справедлива, как показывает автор, несмотря на разрыв при $\xi = \eta = 0$.
W. Wasow
Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 5, 478.

6388. Периодические колебания системы Рокарда с двумя степенями свободы. Аймерих (Oscillazioni periodiche di un sistema di Rocard a due gradi di libertá. Aymerich Giuseppe), Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 1954, 24, 51—62 (итал.)
Рассматривается система

$$\dot{x}_1 = y_1 - 2\varepsilon\alpha_1 \left(x_1 - \frac{1}{4}\pi a_0 \operatorname{sgn} x_1\right),$$

$$\dot{y}_1 = \omega_1^2 x_1 + k_2 x_2, \quad \dot{x}_2 = y_2 - 2\varepsilon\alpha_2 x_2,$$

$$\dot{y}_2 = -\omega_2^2 x_2 - k_2 x_1,$$

где α_1, α_2, a_0, ω_1, ω_2 — положительные постоянные, k_1, k_2 — константы, имеющие один и тот же знак, $k_1 k_2 - \omega_1^2\omega_2^2 > 0$ и ε — малый параметр.
Существование и устойчивость периодических решений доказаны методом Крылова и Боголюбова (Introduction to non-linear mechanics, Princeton, 1943); рассматривается также явление скачков.
J. L. Massera
Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 39.

6389. О неприводимости системы линейных дифференциальных уравнений, происходящей из уравнений для электрических цепей. Рохас-Лагарде (Sobre la no reducibilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales provenientes de las ecuaciones de malla circuitos electricos. Rojas Lagarde Alfredo), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 197—204 (исп.)
Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\sum_{l=1}^{m} (L_{jl} Q_l'' + R_{jl} Q_l' + S_{jl} Q_l) = E_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ L_{jl} = 0 \text{ при } j > u;\ R_{jl} = 0,$$

$$\text{при } j > u + v).$$

Она описывает явления в замкнутых, связанных между собой электрических контурах, определенным образом выбранных в системе электрических цепей.
Исходя из физических соображений, автор показывает, что отдельные контуры можно выбрать так, чтобы определители

$$|L_{jl}|\,(j,\ l \leqslant u),\ |R_{hl}|\,(u+1 \leqslant h,\ l \leqslant u+v),$$

$$|S_{kl}|\,(u+v+1 \leqslant k,\ l \leqslant m)$$

отличались от нуля. В таком случае система называется неприводимой.
Э. Я. Риекстыньш

6390. Математические попытки решения линейных задач, связанных с условием излучения. Дольф (The mathematician grapples with linear problems associated with the radiation condition. Dolph C. H.) IRE Trans. Antens and Propagat., 1956, AP-4, № 3, 302—311. Discuss., 538—539, 540, 544 (англ.)
Обзор работ последних лет, относящихся к трем связанным между собой вопросам математической физики. 1. Рассмотрен ряд результатов, полученных в теории несамосопряженных уравнений типа

$$-y''(x) + [q(x) - \lambda]\, y(x) = o(1)$$

при комплексном $q(x)$, с граничными условиями, соответствующими условиям излучения. Вопросы о естественных граничных условиях, о характере и положении спектра, о теоремах полноты и разложимости, возникающие в теории нормальных волн (в задачах о распространении радиоволн), разрешены в настоящее время, как указывает автор, далеко не полным образом. Дано подробное изложение нескольких новых работ на эти темы, в частности неопубли-

кованной диссертации Симса и статьи М. Наймарка РЖМат, 1955, 3752.

2. В 1944 г. Мак-Фарлан установил, что хотя в пространстве Гильберта уравнение (1) является несамосопряженным для него, тем не менее, существует стационарное выражение, дающее собственное значение (1), причем условия излучения являются естественными граничными условиями. Работы последних лет позволили установить некоторые свойства этого стационарного выражения. Автор сравнивает этот вариационный принцип с известным вариационным принципом Швингера, относящимся к задаче о дифракции радиоволн на телах конечных размеров. Швингер построил стационарное выражение, дающее амплитуду отраженной обратно (на источник) волны. Однако вещественная и мнимая части этого выражения могут иметь для истинного решения как минимум, так и максимум, что сильно сужает область его фактического применения.

3. В работах Неванлинна и его ученика (Ann. Acad. Sci. Finland-Math. Physics, Sec A., Nos, 108, 113, 115 (1952), № 163 (1954), № 183 (1955) сделаны попытки обобщить известный вариационный принцип Дирихле для уравнения $\nabla^2 u = 0$ на внутренние и внешние задачи для волнового уравнения. Автор кратко излагает основные идеи этих работ, представляющих собой, по его мнению, серьезный шаг вперед в теории уравнений с условиями излучения. Библ. 31 назв.

Б. К. Каценеленбаум

6391. Гравитационный потенциал некоторой массы идеального газа, находящегося в равновесии при изотермическом состоянии. Куильгини (Il potenziale gravitazionale di una massa di gas peffetto in equilibrio e in condizioni isotermiche. Quilghini Demore), Bol. Unione mat. ital., 1956, 11, № 3, 422—423 (итал.)

Рассматривается задача о нахождении распределения гравитационного потенциала $U(r)$ внутри идеального газа, находящегося в статическом равновесии в форме сферы и при изотермическом состоянии. Распределение давления и плотности принимается центросимметричным. Давление на поверхности сферы задается (нулевое). Для функции $V(r) = U(r)/k$, где k есть константа в условии изотермичности, получается уравнение

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{\lambda^2}{l^{V_0}}\, l^{V(r)} \quad (\lambda \text{ — константа})$$

найденное впервые Цёльнером (Zöllner) в 1872 г., указавшим один его частный интеграл, и использованное далее Лемке при рассмотрении некоторых астрофизических проблем.

В данной работе доказывается классическим методом последовательных приближений, что вышеприведенное уравнение при данных граничных условиях имеет решение и при этом единственное.

В. В. Добронравов

6392. Конформное преобразование в волновой механике. Обобщение понятия собственного значения. Фор (Transformation conforme en mécanique ondulatoire. Généralisation de la notion de valeur propre. Faure Robert), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 337—339 (франц.)

Рассматривается уравнение Шредингера для двумерной задачи в плоскости xy. Производится преобразование $z = x + iy = f(z)$, $Z = X + iY$, где $f(Z)$ — аналитическая функция от Z. При $f(Z) = Z^2$ преобразованное уравнение для задачи о плоском осцилляторе принимает вид

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(\lambda R^2 - AR^6)\psi = 0, \quad R = |Z|, \quad A > 0. \quad (1)$$

Рассмотрены условия однозначности решения в x, y и X, Y. Автор считает, что уравнение типа (1) приводит к обобщению понятия собственного значения, определяя последнее следующим образом: пусть дано уравнение $\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(\lambda U_1 + U)\psi = 0$, U, U_1 — вещественные функции от X, Y. Собственными значениями будут такие λ, для которых это уравнение допускает однозначные решения, причем интеграл $\iint |\psi|^2 U_1 dX dY$, распространенный на всю плоскость X, Y, имеет смысл.

В заключение показано, что в некоторых случаях с помощью соответствующих преобразований можно свести проблему собственных значений для потенциальной функции $U(x, y)$ к другой функции $F(X, Y)$.

Ф. И. Федоров

6393. Преобразование систем в релятивистской механике частиц. Рубин, Сапс (Transformations of systems of relativistic particle mechanics. Rubin Herman, Suppes Patrick), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 4, 563—601 (англ.)

Автор ставит перед собой задачу — математически представить полную совокупность аксиом, соответствующих теории релятивистской механики частиц. На основании ряда приведенных кинематических и динамических аксиом доказывается несколько теорем: теорема 1), являющаяся обобщением хорошо известного результата о том, что уравнения движения в релятивистской теории являются ковариантными при преобразовании Лоренца, и теорема 2) (являющаяся основным результатом статьи): Пусть $\Phi = \langle \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle$ — допустимое преобразование, а c и c' — положительные действительные числа такие, что 1) для каждой n-мерной частицы в релятивистской механике $\langle c, \Phi(1_c), c' \rangle$ является системой точек релятивистской механики и 2) Φ_2 не переводит никакую c-линию в траекторию c' частицы. Тогда существуют положительные действительные числа γ и λ, $(n+1)$-мерный вектор B и обобщенная матрица Лоренца $\mathfrak{A}$ относительно $\langle c, c', \lambda \rangle$ такие, что для любых векторов Z_1 и $Z_2 \in E_n$ с $|Z_2| < c$ для каждого $x \in R$ и $y \in R^+$ имеет место

$$\Phi_1(y) = \gamma y,$$

$$\Phi_2(Z_1, x) = \langle Z_1, x \rangle \mathfrak{A} + B,$$

$$\Phi_3(Z_1, Z_2) = \frac{\gamma c'^2}{\lambda^2 c^2}\left[\left\langle Z_1, \frac{Z_1 Z_2}{c^2}\right\rangle \mathfrak{A}\right]_{1, \ldots, n}$$

Здесь E_n — множество всех n-мерных векторов, R — множество всех действительных чисел, а R^+ — множество всех положительных действительных чисел.

Ю. А. Митропольский

6394. Некоторые вопросы устойчивости движения в ограниченной проблеме трех тел переменной массы. Филянская Е. П., Тр. Одесск. ун-та, 1956, 146, сер. матем. н., № 6, 85—88

6395. Скалывающие напряжения при изгибе Т-образной балки. Базилевич (Shearing stress in bending of T beams. Basilevich V.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, 9, 59—67 (англ.)

Исследуется изгиб концевой силой консольной балки, Т-образного поперечного сечения. Гармоническая функция напряжений в каждом из составляющих поперечное сечение прямоугольников строится в виде ряда Фурье, что позволяет точно удовлетворить граничным условиям на трех сторонах соответствующих прямоугольников. Оставшиеся граничные условия приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Построены графики скалывающих напряжений для некоторых соотношений размеров.

Я. С. Уфлянд

6396. Некоторые проблемы плоской деформации цилиндра с цилиндрической анизотропией. Чакраворти (Some problems of plane strain in a cylindrically aeolotropic cylinder. Chakravorty J. G.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, 47, № 4, 231—234 (англ.)

Изучается осесимметричное распределение напряжений в полом круговом цилиндре, обладающем цилиндрической анизотропией и притом ортотропном. Предполагается, что цилиндр находится в равновесии или вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг геометрической оси, принятой за ось z цилиндрической системы координат r, θ, z.

Автор исследует напряжения, которые соответствуют перемещениям вида: $u = u(r)$, $v = Er\theta$, $w = ez$.

Из основной системы уравнений равновесия тела с указанными упругими свойствами (с учетом объемных сил, развивающихся при вращении) для радиального перемещения u получается обыкновенное линейное неоднородное уравнение второго порядка, правая часть которого — алгебраическая функция с коэффициентами, зависящими от постоянных E и e. Общий интеграл этого уравнения выражается через степенные функции и содержит, кроме E, e, две произвольные постоянные A, B. Все четыре постоянные A, B, E, e определяются из условий на цилиндрических поверхностях, которым можно удовлетворить точно, и из условий на торцах, которым можно удовлетворить только приближенно, учитывая принцип Сен-Венана.

Рассмотрены три частных случая, для которых определены все четыре постоянные, а именно: 1) цилиндр со свободной поверхностью, вращающийся с постоянной угловой скоростью вокруг оси z; 2) цилиндр, растягиваемый осевыми усилиями и 3) цилиндр, из которого вырезана часть, ограниченная двумя радиальными плоскостями, пересекающимися под малым углом, спаянный по поверхности разреза. Второй случай, как отмечает автор, был ранее изучен другим методом референтом (Прикл. матем. и механика, 1949, **13**, № 3, 307—316); остальные случаи рассматриваются впервые.

С. Г. Лехницкий

6397. Об одном классе точных решений в цилиндрических функциях уравнений равновесия упругого тела. Цай А. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 143—162

Указываются решения уравнений статики упругого тела (при отсутствии массовых сил) в цилиндрических координатах (r, φ, z) при задании радиального (u_r), тангенциального (u_φ) и осевого (u_z) перемещений в форме

$$u_r = e^{kz}\cos(n\varphi + a)\,R_r,$$

$$u_\varphi = e^{kz}\sin(n\varphi + a)\,R_\varphi,$$

$$u_z = e^{kz}\cos(n\varphi + a)\,R_z$$

и в форме

$$u_r = \cos(n\varphi + a)\cos(kz + b)\,R_r,$$

$$u_\varphi = \sin(n\varphi + a)\cos(kz + b)\,R_\varphi,$$

$$u_z = \cos(n\varphi + a)\sin(kz + b)\,R_z.$$

Здесь k, n, a и b — произвольные параметры, а R_r, R_φ и R_z — функции переменной r, выражаемые в окончательных результатах через функции Бесселя порядка n и $n+1$.

Статья повторяет работу автора, опубликованную в 1954 г. (РЖМат, 1956, 1405)

К. В. Соляник-Красса

6398. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. Ворович И. И., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 4, 449—474

Исследуются свойства приближенного решения прямыми методами системы

$$L_{j1}u + L_{j2}v + L_{j3}w = q_{j0}\ (j = 1,\ 2,\ 3;\ q_{10} = q_{20} = 0),$$

где L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22} — дифференциальные операторы плоской задачи теории упругости, L_{33} — бигармонический оператор. На контуре Γ заданы $u = u(s)$ и $v = v(s)$, на w ставятся краевые условия свободного опирания. Предполагается, что 1) контур Γ достаточно гладкий, так что существует тензор функции Грина плоской задачи и функция Грина бигармонического оператора $G(PQ)$

$$G(P,\ Q) = \frac{1}{8\pi} r_{PQ}^2 \ln r_{PQ} + g(P,\ Q),$$

где $g(P, Q)$ имеет вторые производные, принадлежащие $L_{2+\varepsilon}$; 2) коэффициенты операторов L_{13}, L_{23} и q_{30}, интегрируемые с квадратом; 3) $u(s)$ и $v(s)$ такие, что частное решение однородных уравнений плоской задачи имеет интегрируемые с квадратом первые производные.

При помощи функций Грина задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$w(P) = \int G(P,\ Q)\,A\{w\}\,dQ, \qquad (1)$$

где A — дифференциальный оператор, выражающийся через L_{j3} $(j = 1,\ 2)$.

Вводится гильбертово пространство H_1, состоящее из функций, имеющих вторые непрерывные производные и удовлетворяющих краевым условиям свободного опирания, со скалярным произведением

$$(w_1, w_2)_{H_1} = \int [\nabla^2 w_1 \nabla^2 w_2 - (1-\nu)(w_{1xx}w_{2yy} + w_{2xx}w_{1yy} - 2w_{1xy}w_{2xy})]\,dQ,$$

норма в H_1 пропорциональна потенциальной энергии изгиба.

Доказывается, что 1) всякая минимизирующая потенциальную энергию оболочки I последовательность сильно компактна в H_1; предел этой последовательности является одной из критических точек функционала I, 2) все множество приближений, получаемых по методу Бубнова—Галеркина, заключенное в сфере пространства H_1 достаточно большого произвольного радиуса, бесконечно и сильно компактно в H_1; каждая предельная точка w_n в H_1 есть решение уравнения (1).

Выводятся условия, которым должны удовлетворять координатные функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, образующие в H_1 ортонормированный базис, чтобы равномерно сходились последовательности w_{nxx}, w_{nyy}, w_{nxy}.

Исследуется также сходимость метода разложения решения по степеням введенного в уравнение (1) малого параметра ν. Пусть $A_1\{w\}$ — производная Фреше оператора в правой части (1). $A_1(w)$ — вполне непрерывный оператор, действующий из H_1 в H_1. Рассматриваются два случая: 1) когда $\lambda = 1$ не является собственным значением уравнения $w_1 - \lambda A_1\{w_1\} = 0$ и 2) когда $\lambda = 1$ — собственное значение. Во втором случае решение представляется в форме $w = \sum\sum w_{mn}\nu^m l^n$, где l — постоянная, определяемая из условия существования оператора K^*, обратного $w_1 - A_1\{w_1\}$.

При достаточно малых значениях ν

$$l = \beta_1 \nu^{1/2} + \beta_2 \nu^{2/2} + \beta_3 \nu^{3/2} + \ldots,$$

коэффициенты β_1, β_2, ... не всегда действительны. С точки зрения механики, второй случай соответствует критическим состояниям равновесия второго рода.

Приводятся некоторые оценки погрешности приближенного решения в метрике H_1. Н. А. Алумяэ

6399. **Структура вектора смещения граничных задач динамики упругого тела. Аржаных И. С.**, Тр. Среднеаз. ун-та, 1956, вып. 66, 3—20

Для системы уравнений Ламе, определяющих колебания упругой среды, даются новые формулы, представляющие истокообразно скалярный и векторный потенциалы смещений. Из этих формул выводятся функциональные уравнения первой и второй граничной задачи неустановившихся колебаний, принадлежащие к типу интегро-дифференциальных с запаздыванием по времени t. Для этих уравнений построены их лапласовы изображения (по аргументу t.)

Из тензорной формулы, аналогичной формуле Кирхгофа, выводятся теоремы о поведении запаздывающих потенциалов при приближении к поверхности класса Ляпунова. Эти теоремы обнаруживают аналогию с поведением ньютонова потенциала. Из этих теорем, как и в теории ньютонова потенциала, выводятся функциональные (интегро-дифференциальные с запаздыванием по времени t) уравнения для плотностей простого и двойного слоя. Н. А. Ростовцев

6400. **Тонкие круглые плиты под нормальной нагрузкой. Бассали, Давуд** (Thin circular plates under certain distributions of normal loading. Bassali W. A., Dawoud R. H.), Mathematika, 1956, **3**, № 6, 144—152 (англ.)

Дается решение задачи об изгибе упругой тонкой плиты, имеющей форму круга и нагруженной нормальными усилиями. Интеграл бигармонического уравнения изгиба ищется в виде разложения прогиба в тригонометрический ряд по полярному углу.

Граничные условия на контуре $r=c$ плиты берутся в виде:

$$w = 0, \quad c\partial^2 w/\partial r^2 + \nu \partial w/\partial r = 0,$$

причем известные случаи закрепленного и свободно опертого края получаются соответственно при $\nu = \infty$ и $\nu = \eta$ (η — коэффициент Пуассона).

Рассмотрены следующие частные случаи внешней нагрузки: 1) сосредоточенная сила или пара в произвольной точке, 2) нагрузка, равномерно распределенная по отрезку диаметра, а также по площади сектора. Я. С. Уфлянд

6401. **Об упругом кручении полых призм. Фикера** (Sulla torsione elastica dei prismi cavi. Fichera Gaetano), Rend. mat. e applic., 1953, 12, № 1—2, 163—176 (итал.)

Для упруго скручиваемой полой призмы рассматривается задача оценки роста напряжений τ_{zx} и τ_{zy} в окрестности ребер призмы. В поперечном сечении призмы в окрестности вершины любого угла с мерой $\mu\pi$ функция напряжений φ представляется в виде $\varphi = q[\varphi]\,\rho^{1/\mu}\cos(\theta/\mu) + \varphi_0$, где ρ, θ — полярные координаты с полюсом в вершине угла, $q[\varphi]$ — численный коэффициент, подлежащий определению, φ_0 — регулярный член, являющийся функцией с непрерывной первой производной в окрестности вершины. Задача сводится к вычислению коэффициента $q[\varphi]$. С этой целью предлагается приближенный процесс, посредством которого с любой степенью точности определяются гармонические функции u и v такие, что $u = x^2 + y^2$ на обоих контурах поперечного сечения призмы; $v = 0$ на внешнем, $v = 1$ на внутреннем контуре сечения. Для функций u и v строятся квадратические приближения в пространстве некоторых функций ω_k ($k = -1, 0, 1, 2\ldots$) с метрикой $(f, g) = \int (fg + f'g')\,ds$ (интеграл берется по совокупности обоих контуров сечения, s — криволинейная абсцисса). Функции ω_k определяются формулами:

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_{4k-3} = \mathrm{Re}\, z^k; \quad \omega_{4k-2} = \mathrm{Im}\, z^k; \quad \omega_{4k-1} = \mathrm{Re}\, z^{-k};$$

$$\omega_{4k} = \mathrm{Im}\, z^{-k} \quad (z = x + iy)$$

$$\omega_{-1} = v \text{ или } \log|z|.$$

Доказывается полнота функционального пространства и сходимость процесса.

Выведены двусторонние оценки каждого приближения. Дается численный пример оценки $q[\varphi]$ в первом приближении. Н. А. Ростовцев

6402. **О некоторых диффузионных задачах математической физики и об одном связанном с ними вопросе статистической механики, имеющем отношение к теории броуновского движения. Пиньедоли** (Su alcuni problemi diffusivi della fisica matematica e su una questione connessa di meccanica statistica, interessante la teoria del moto browniano. Pignedoli Antonio. Atti Accad. Sci. Inst. Bologna. Cl. Sci. Fis. Rend. (11), 1954, 1, № 2, 5—20) (итал.)

Рассматривается диффузия нейтронов в замедляющей среде. Вначале стандартным методом разложения по собственным функциям решается классическое неоднородное уравнение диффузии в обычном пространстве. Затем в пространстве координат и скоростей рассматривается уравнение диффузии в простейшем случае, когда функция распределения зависит лишь от пространственной координаты x и одной угловой составляющей скорости. Путем преобразования Лапласа получено решение в виде разложения по степеням x и t (t — время).

Наконец, проводится рассмотрение отклонений в распределении энергии нейтронов в предположении, что изменения энергии, являющиеся случайными функциями, описываются уравнением Фоккера — Планка и что существует верхний предел энергий. Обоснования этих рассмотрений не проводится.

Автор не учел и даже не процитировал весьма многочисленной литературы, опубликованной на эту тему. L. Van Hove

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 168.

6403. **О взаимосвязи между фазовыми плоскостями уравнения Релея и уравнения Ван-дер-Поля. Казакевич В. В.**, Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 4, 521—523

См. РЖМех, 1957, 3905

6404. **Обобщенные периодические особые точки с применениями в задачах течений. Канвал** (Generalized periodic singular points with applications to flow problems. Kanwal R. P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, **47**, № 1, 9—22 (англ.)

См. РЖМех, 1957, 6757

6405. **О некоторых интегралах одномерного движения газа. Завьялов Ю. С.**, Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 25, 781—782

Мартин (Martin M. H., Quart. Appl. Math., 1950, 8, № 2, 137) показал, что уравнения одномерного движения газа в переменных ξ, p (ξ — переменная Лагранжа, p — давление) приводятся к одному уравнению Монжа-Ампера для некоторой функции Ф. Автор обнаруживает, что если производная от удельного объема газа по давлению зависит только от давления, то это уравнение обладает интегралами некоторого

специального вида, включающими одну произвольную функцию от давления и одну произвольную постоянную. Далее устанавливается необходимое и достаточное условие существования интегралов полученного типа в случае, когда производная удельного объема газа по давлению зависит также и от переменной Лагранжа, и обсуждаются различные частные случаи получающихся при этом уравнений состояния газа, а также возможные постановки краевых задач.

Г. И. Баренблатт

См. также: 6261, 6263, 6264, 6279, 6458, 6467, 6492, 6494, 6504, 6506К, 6667, 6689

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6406. О функционале с особенностью. Мартин (A singular functional. Martin Allan D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1031—1035 (англ.)

Автор обобщает и дополняет результаты по теории квадратичных функционалов с особенностями, содержащиеся в заметке Лейтона и автора (РЖМат, 1957, 4894). Рассматривается функционал

$$J(y)\Big|_x^b = \int_x^b [ry'^2 + 2qyy' + py^2]\,dx \quad (0 < x < b), \qquad (1)$$

где r, p, q — непрерывные (r — положительная) функции на $(0, \infty)$. Точка $x = 0$ является особой для функционала (1), т. е. существует отрезок $[0, b]$, где r, p, q не удовлетворяют вышеназванным условиям. Интеграл (1) понимается в смысле Лебега. Пусть $F[0, b]$ — класс абсолютно непрерывных функций с $y' \in L_2$ на любом замкнутом подинтервале интервала $(0, b]$, для которых $y(b) = 0$; $F'[0, b]$ — класс всех ограниченных на $[0, b]$ функций $y \in F[0, b]$; $F_0[0, b]$ — класс функций $y \in F[0, b]$, для которых $x = 0$ является предельной точкой нулей y; $A[0, b]$ — класс функций $y \in F[0, b]$, непрерывных на $[0, b]$, для которых $y(0) = 0$; $A_0[0, b]$ — класс функций $y \in A[0, b]$, для которых $x = 0$ является предельной точкой нулей y. Требуется найти условия, при которых $J(y)\Big|_0^b \geqslant 0$ для любой $y \in X[0, b]$ ($X[0, b]$ — один из приведенных выше классов), т. е. требуется найти X-минимум функционала J на $[0, b]$.

Пусть $u \not\equiv 0$, $v \not\equiv 0$ — решения уравнения Эйлера для (1) $(ry' + qy)' - (qy' + py) = 0$ $(0 < x \leqslant b)$, удовлетворяющие условиям: $u(a) = 0$, $r(a)v'(a) + q(a)v(a) = 0$. Точка $x = c(a)$ называется сопряженной с точкой $x = a$, если она является первым, расположенным правее от $x = a$, нулем решения u. Точка $x = f(a)$ называется фокальной точкой прямой $x = a$, если она является первым, расположенным правее от $x = a$, нулем решения v. Предполагается, что $c(0) = \lim c(x)$ и $f(0) = \lim f(x)$. Доказываются теоремы:

1. Для того чтобы отрезок $[0, b]$ реализовал A_0-минимум функционала J, необходимо, чтобы $c(0) \geqslant b$ и

$$J(y)\Big|_0^b > -\infty \qquad (2)$$

для любой $y \in F'[0, b]$.

2. Если $c(0) \geqslant b$ и выполняется (2) для любой $y \in A_0[0, b]$, то для всех $y \in A_0[0, b]$ справедливо неравенство $J(y)\Big|_0^b \geqslant 0$. Показывается, что теорема 2 не верна, если $A_0[0, b]$ заменить через $A[0, b]$.

3. Если $q = 0$, $c(0) \geqslant b$, $\underline{\lim} \int_x^b p(t)\,dt > -\infty$ и $\overline{\lim}\, r(x)p(x) < \infty$, то J имеет на $[0, b]$ A-минимум.

4. Функционал J имеет F_0-минимум на $[0, b]$ тогда и только тогда, когда $c(0) \geqslant b$ и $f(0) > 0$.

М. К. Керимов

6407. Об одной элементарной экстремальной задаче. Пиконе (Su un elementare problema di estremo. Picone Mauro), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 173—184 (итал.)

Даны непрерывные на $[a, b]$ функции

$$f_{hk}(x) \equiv f_{kh}(x) \quad (h, k = 1, 2, \ldots, r)$$

и два вектора $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ и $B(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$, $A \neq B$. Пусть $\Gamma(A, B)$ — класс векторов $Y(x) \equiv \equiv \{y_1(x), \ldots, y_r(x)\}$, удовлетворяющих условиям $Y(a) = A$, $Y(b) = B$, причем $y_1(x), \ldots, y_r(x)$ принадлежат классу D^1. Требуется определить в классе $\Gamma(A, B)$ нижнюю грань выражения

$$\varphi[Y] = \int_a^b \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r f_{hk}(x)\,y_h'(x)\,y_k'(x)\,dx$$

или

$$\varphi[Y] = \int_a^b (Y', FY')\,dx, \qquad (1)$$

где F — квадратная матрица $\| f_{hk} \|$, через FY' обозначено произведение матрицы F на вектор Y' и все подинтегральное выражение изображает скалярное произведение векторов Y' и FY'.

Доказываются теоремы:

1. Для того чтобы вектор $Y(x)$ реализовал минимум (1), необходимо, чтобы на $[a, b]$ удовлетворялось уравнение

$$FY' = C \qquad (2)$$

или

$$F_hY' \equiv \sum_{k=1}^r f_{hk}(x)\,y_k'(x) = C_h \quad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

где через F_h обозначен вектор с компонентами f_{h1}, f_{h2}, $\ldots$, f_{hr}, а $C(c_1, \ldots, c_r)$ — постоянный вектор.

2. Если квадратичная форма

$$(\lambda, F\lambda), \qquad (3)$$

где λ — некоторый вектор, не является положительно полуопределенной на всем $[a, b]$, то нижняя грань $\varphi[Y]$ в классе $\Gamma(A, B)$ равна $-\infty$.

3. Если форма (3) положительно полуопределена в каждой точке $[a, b]$ и существует вектор $Y_0(x)$ из $\Gamma(A, B)$, удовлетворяющий уравнению (2), то он реализует минимум выражения $\varphi[Y]$.

Доказывается несколько теорем о существовании и несуществовании минимума (1) в зависимости от равенства нулю F на $[a, b]$. Указываются случаи, когда минимум (1) не существует, но нижняя грань существует. В частности, доказывается теорема:

4. Пусть матрица F равна нулю на множестве точек из $[a, b]$ с мерой нуль; пусть на оставшейся части $[a, b]$ квадратичная форма (3) положительно полуопределенна, а функция $|F||F^{-1}|^2$ суммируема на $[a, b]$. Тогда $\varphi[Y]$ не имеет в классе $\Gamma(A, B)$ минимума, но имеет положительную нижнюю грань

$\varphi[Y^*]$, где $Y^*(x) = A + \int_a^x F^{-1}\,d\xi \cdot C$, а C определяется из уравнения

$$A + \int_a^b F^{-1}\,dx \cdot C = B.$$

Указывается несколько нерешенных задач, относящихся к теории рассматриваемой задачи, а также аналогичной задачи для случая кратных интегралов.
М. К. Керимов

6408. К теории вариационных задач с кратными интегралами в параметрической форме. Фелъте (Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale in Parameterdarstellung. Velte Waldemar), Mitt. math. Semin. Giessen, 1953, № 45, 1—33 (нем.)

Рассматривается вариационная задача с кратными интегралами в параметрической форме вида

$$\int f(x_i,\ p_{(i)})\,dt_1 \ldots dt_\mu = \min \quad (i = 1, \ldots n;\ \mu < n), \quad (1)$$

где $f(x_i,\ p_{(i)})$ — достаточное число раз непрерывно дифференцируемая функция, $f(x_i,\ cp_{(i)}) = cf(x_i,\ p_{(i)})$, $c > 0$,

$$p_{(i)} = p_{i_1, i_2, \ldots, i_\mu} = \begin{vmatrix} x_{i_1 1} & \ldots & x_{i_1 \mu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_{i_\mu 1} & \ldots & x_{i_\mu \mu} \end{vmatrix} \quad (i_1 < i_2 < \ldots < i_\mu).$$

Доказывается несколько геометрических теорем, относящихся к задаче (1), и вводятся интеграл, не зависящий от пути интегрирования (аналог инвариантного интеграла Гильберта), и понятие регулярного элемента поверхности. Элемент поверхности $(x_i,\ p_{(i)})$ называется положительно (отрицательно) регулярным, если квадратичная форма

$$Q_1 = f_{(i)(k)}\,\xi_{(i)}\,\xi_{(k)} \quad (\partial f / \partial p_{(i)} = f_{(i)})$$

при условии $p_{(i)}\xi_{(i)} = 0$ является положительно (отрицательно) определенной формой.

Доказывается, что для регулярного элемента поверхности справедливо неравенство $f_1 > 0$, где

$$f_1 = -\begin{vmatrix} f_{(i)(k)}, & p_{(i)} \\ p_{(k)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Вводится понятие поля экстремалей, содержащее данную экстремаль, и доказывается, что для того чтобы данная экстремаль, содержащаяся в поле экстремалей, реализовала минимум (1), достаточно, чтобы вдоль нее элементы поверхности $(x_i,\ p_{(i)})$ были положительно регулярными (т. е. выполнялось условие $f_1 > 0$). Далее вводится для (1) преобразование Лежандра, находится соответствующее дифференциальное уравнение Гамильтона и с помощью этих понятий доказывается существование поля экстремалей, содержащего данную экстремаль. Наконец, для задачи (1) при условии, когда граница области интегрирования является переменной, доказываются достаточные условия минимума и находится необходимое условие трансверсальности. М. К. Керимов

6409. Алгебраический базис вариационной теории Морса. Сингбал (Algebraic basis of Morse's variational theory. Singbal B. V.), J. Indian Math. Soc., 1954, 18, № 4, 131—165 (англ.)

Строится общая алгебраическая схема, содержащая классические результаты Морса (Morse M., Functional topology and abstract variational theory. Paris, 1939), а также результаты Деёвеля (РЖМат, 1955, 825).

Пусть R — частично упорядоченное множество, в котором $(p, q, r, \ldots)$ означает $p \geqslant q \geqslant \ldots$, $(p, q, \ldots) \geqslant (p', q', \ldots)$ означает $p \geqslant p',\ q \geqslant q', \ldots$ Гомологическая теория с индексным множеством R состоит из следующих объектов: 1) для каждой (p, q) дана абелева группа $H(p, q)$; 2) для $(p, q) \geqslant (p', q')$ дан гомоморфизм $\tau^{pq}_{p'q'}$: $H(p', q') \to H(p, q)$; 3) для (p, q, r) дан гомоморфизм d: $H(p, q) \xrightarrow{d} H(q, r)$. При этом должны соблюдаться четыре аксиомы:

H_1. $H(p, q) \to H(p, q)$ есть тождественный гомоморфизм.

H_2. Если $(p, q) \geqslant (p', q') \geqslant (p'', q'')$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(p'', q'') & \to & H(p, q) \\ & \searrow & \nearrow \\ & H(p', q') & \end{array}$$

коммутативна;

H_3. Если $(p, q, r) \geqslant (p', q', r')$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(p', q') & \xrightarrow{d} & H(q', r') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(p, q) & \xrightarrow{d} & H(q, r) \end{array}$$

коммутативна;

H_4. Если (p, q, r), то последовательность

$$\ldots \to H(q, r) \to H(p, r) \to H(p, q) \xrightarrow{d} H(q, r) \to \ldots$$

точна.

Пусть для любой (p, q, r, s)

$$E(p, q, r, s) = \text{образ}\ \{H(q, s) \to H(p, r)\},$$

$$D(p, q, r, s) = \text{образ} \left\{ \begin{array}{ccc} H(p, r) & \to & H(q, s) \\ & \overset{d}{\nwarrow} H(r, s) & \end{array} \right\}.$$

R пополняется элементами $\omega = p - 0$ (ср. РЖМат, 1955, 825); на полученном множестве $R' \supset R$ определяется $H(\omega_1, \omega_2)$ как предельная группа прямого спектра $\{H(p, q)\}$ по направленному множеству пар $(p, q) \leqslant (\omega_1, \omega_2)$, с гомоморфизмами $\tau^{pq}_{p'q'}$. Группы $H(\omega_1, \omega_2)$ образуют расширение заданной гомологической теории; в расширенной теории верны те же аксиомы.

Выводятся некоторые точные последовательности, содержащие $E(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ и $D(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Частный случай теории: Пусть $(A,\ a)$ — дифференциальная группа с дифференциалом d и оценкой $f(a) \in R$ $(a \in A)$, $f(da) \leqslant f(a)$. Рассматриваются подгруппы $A^p = \{a \mid f(a) \leqslant p\}$ и для $q \leqslant p$ образуется группа $H(p, q)$ гомологий A^p/A^q относительно дифференциала d.

Пусть K — группа (в противном случае полагают ниже $h = 0$). Вводятся обобщенные группы Морса

$$L_p(h) = E(p + h,\ p,\ p - 0,\ p - h - 0),\ L = \sum L_p(h);$$

$$P_p(h) = E(p + h,\ p,\ p - 0,\ -\infty),\ P = \sum P_p(h);$$

$$K_p = E(\infty,\ p,\ p - 0,\ -\infty),\ K = \sum K_p;$$

$$M_p(h) = D(p,\ p - 0,\ p - h - 0,\ -\infty),\ M = \sum M_p(h);$$

$$N_p(h) = D(\infty,\ p + h,\ p,\ p - 0),\ N = \sum N_p(h),$$

где $h \in R$ и суммирование производится по всем $p \in R$.

Основной результат: последовательности

$$0 \to P \to L \to M \to 0, \qquad 0 \to N \to P \to K \to 0 \qquad (1)$$

точны.

Если $H(p, q)$ градуированы, степень $d = -1$, R — группа действительных чисел и группы $H(-\infty, \infty)$, L имеют конечное число образующих, из точности (1) вытекают обычные неравенства Морса.

Аналогично, с помощью обратных спектров, строится «обратное расширение» гомологической теории на пары $H(\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1, \omega_2 = p$ или $p + 0$. Для обратных расширений точность (1) может быть установлена лишь при специальных условиях достижимости (accessibility) (выполненных в классическом случае); при этом получаются обобщения результатов Деёвеля.

Теория применяется к функциям, заданным на топологическом пространстве; определение (A, d) и оценки с помощью такой функции аналогичны определению Деёвеля для сингулярных коцепей (РЖМат, 1955, 825). А. И. Фет

См. также: 6267

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

6410. Дополнение к одной задаче Карамата. Данциг (Complément à un problème de M. Karamata. Danzig D. van), Nieuw arch. wiskunde, 1956, 4, № 3, 109—111 (франц.)

Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$ — последовательности положительных чисел, причем последовательность ρ предполагается неубывающей и $\rho_1 > 1$.

Будем говорить, что последовательность $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ вещественных чисел принадлежит классу $D(\alpha)$, если при $n \geqslant 1$

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \alpha_n, \qquad (1)$$

и классу $S(\lambda)$, если при $n \geqslant 1$

$$\left| \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k x_k \right| \leqslant 1. \qquad (2)$$

Пусть $L(\rho)$ будет класс последовательностей x, для каждой из которых существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_1, n_2, \ldots\}$, имеющая два свойства:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = 0, \qquad (3)$$

$$n_{k+1} \leqslant \rho_k n_k \text{ для каждого } k \geqslant 1. \qquad (4)$$

Наконец, положим

$$b = \limsup \alpha_n, \quad l = \liminf n\lambda_n, \quad r = \lim \rho_n.$$

Доказывается теорема: Для каждой последовательности x, удовлетворяющей условиям (1) и (2) с $b = 0$ и $l > 0$, и каждой неубывающей последовательности ρ с $r = \infty$ существует такая последовательность $\{n_k\}$, что удовлетворяются условия (3) и (4).

Итак, если D есть объединение всех $D(\alpha)$ с $b = 0$, S — объединение всех $S(\lambda)$ с $l > 0$ и L' — пересечение всех $L(\rho)$ с $r = \infty$, то теорема выразится соотношением

$$D \cap S \subset L'.$$

С другой стороны, на основании результатов прежней заметки автора (РЖМат, 1956, 5947), если обозначить последовательность чисел n^{-1} через I, а объединение всех $L(\rho)$ с $r < \infty$ через L, найдутся $x \in D(I) \cap S(I) \subset D \cap S$, не принадлежащие L, так что $D \cap S \cap (L' - L) \neq 0$. Г. М. Фихтенгольц

6411. Теоремы типа Мерсера для нелинейных средних. Вучкович (Mercersche Sätze für nichtlineäre Mittel. Vučković Vladeta), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, **10**, 79—84 (нем.)

Рассматриваются положительные последовательности $\{x_n\}$ и составленные из их членов средние $\{X_n\}$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\min_{1 \leqslant \nu \leqslant n} x_\nu \leqslant X_n \leqslant \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} x_\nu,$$

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, X_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n.$$

Теорема. Пусть $q > -1$ и

$$y_n = (x_n + qX_n)/(1 + q) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда из $y_n \to y$ следует $x_n \to y$, если только последовательность X_n монотонна или имеют место включения

$$X_n \gtreqless X_{n-1} \to y_n \gtreqless X_n.$$

В частности, теорема применима к геометрическим и гармоническим средним; для этих случаев строятся примеры, показывающие, что теорема перестает быть верной при $q < -1$. Г. М. Фихтенгольц

6412. Определение распределений с помощью средних величин. Винце (Eloszlások meghatározása középértékeik segítségével. Vincze István), Magyar tud. mat. es fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 4, 513—523 (венг.)

В ограниченной, замкнутой и односвязной области T трехмерного пространства задано распределение с плотностью $\rho(x, y, z)$, где $\rho(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по x, y, z до второго порядка включительно. Пусть

$$T_{n1}, T_{n2}, T_{n3}, \ldots, T_{nn} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

обозначают систему кубов, расположенных в области T, попарно не имеющих общих внутренних точек, и грани которых параллельны координатным плоскостям. Рассматриваются всевозможные такие системы. Обозначим через $D(T_{nk})$ диаметр куба T_{nk} и предположим, что $\max_{(k)} D(T_{nk}) \to 0$ при $n \to \infty$ и что каждая внутренняя точка области T содержится в бесконечно многих кубах, взятых из систем (1). При этих предположениях имеет место следующее утверждение:

Если для каждого T_{nk} известны координаты центра тяжести распределения, тогда можно однозначно определить само распределение $\rho(x, y, z)$ с точностью до постоянного множителя.

Аналогичная теорема имеет место для одномерного случая. Теорему можно также формулировать в терминах теории вероятностей. Автор доказал эту теорему в связи с изучением космогонической теории О. Ю. Шмидта. P. Medgyessy

6413. Алгебраические свойства классов функций. Грау, Голдбек (Algebraic properties of classes of functions. Grau A. A., Goldbeck B. T., Jr), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 9, 636—638 (англ.)

Как обобщение понятий четных и нечетных функций рассматриваются для любого натурального n классы ${}_n\mathfrak{F}_k$ $(k=0, 1, \ldots, (n-1))$ комплекснозначных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$f(\omega x)=\omega^k f(x),$$

где ω — первообразный корень n-й степени из единицы.

Всякая комплекснозначная функция $f(x)$ может быть единственным образом представлена как

$$f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_{n-1}(x),$$

где $f_k(x)$ принадлежит классу ${}_n\mathfrak{F}_k$.

Классы ${}_n\mathfrak{F}_k$ при фиксированном n и $k=0, 1, \ldots, n-1$ образуют кольцо, если за класс ${}_n\mathfrak{F}_{k+s}={}_n\mathfrak{F}_m$ $[K+s\equiv m \bmod n]$ принять класс функций $f(x)g(x)$, где $f(x)$ принадлежит классу ${}_n\mathfrak{F}_k$, а $g(x)$ — классу ${}_n\mathfrak{F}_s$, а за класс ${}_n\mathfrak{F}_{ks}={}_n\mathfrak{F}_m$ $[ks\equiv m \bmod n]$ — класс функций $f[g(x)]$, при тех же предположениях относительно $f(x)$ и $g(x)$.

Кольцо классов ${}_n\mathfrak{F}_k$ изоморфно кольцу классов чисел относительно модуля n. Б. М. Гагаев

6414. О разложении рациональной дроби на простейшие. Макаров Ф. П., Уч. зап. Тираспольск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 3, 133—138

6415. О линейно зависимых функциях. Монтель (Sur les fonctions linéairement dépendantes. Montel Paul), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 1, 22—24 (франц.)

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ — n непрерывных функций, определенных на интервале (a, b). В случае, когда они имеют производные до порядка $n-1$ включительно, вопрос о их линейной зависимости разрешается, если рассматривать детерминант Вронского.

Цель работы — найти необходимые и достаточные условия линейной зависимости без требования существования производных. Рассматривается детерминант Казорати (Casorati):

$$D_{(n-1)h}=\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1(x+h) & u_2(x+h) & \ldots & u_n(x+h) \\ u_1(x+2h) & u_2(x+2h) & \ldots & u_n(x+2h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1(x+(n-1)h) & u_2(x+(n-1)h) & \ldots & u_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix},$$

а также детерминанты $D_{ph, qk}$, где $p+q=n-1$, полученные из $D_{(n-1)h}$ следующим образом: первые $p+1$ первых строк сохраняются, а в следующих q строках x заменяется на $x+k$, $x+2k$, ..., $x+qk$. Имеет место теорема: для того чтобы функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы детерминанты $D_{(n-1)h}$, $D_{(n-2)h, k}$, $D_{(n-3)h, 2k}$, ..., $D_{h, (n-2)k}$, $D_{(n-1)k}$ были тождественно равны нулю и отношение h/k было иррациональным.

Указываются случаи, в которых одни лишь условия $D_{(n-1)h}=D_{(n-1)k}=0$ оказываются достаточными для линейной зависимости $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Аналогичная задача рассматривается для случая, когда функции $u_1(z)$, $u_2(z)$, ..., $u_n(z)$ — аналитические функции комплексного переменного z в некоторой области S, а также для случая, когда функции u_i зависят от двух действительных переменных.

Н. К. Бари

6416. О геометрии нулей многочленов. Добжицкий (O geometrii zer wielomianów. Dobrzycki S.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser., 1, 2, № 1, 94—116 (польск.; рез. русск., англ.)

Обзор некоторых классических теорем геометрии нулей полиномов.

6417. О дифференцируемости по Штольцу сложных функций. Бонати-Саворньян (Sulla differenziabilità secondo Stolz delle funzioni composte. Bonati Savorgnan Carlo), Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII, 1953—1954, 3, 17—24 (итал.; рез. франц.)

Дополняя прежнюю свою работу (РЖМат, 1955, 2153), автор снова рассматривает сложную функцию вида $f(x(t), y(t), z(t))$ и для нее устанавливает достаточные условия существования обыкновенной производной по t (раньше шла речь об асимптотической производной) почти всюду в промежутке изменения t. Мы не приводим относящейся сюда теоремы, так как она содержится как частный случай в следующей теореме, в которой речь идет о сложной функции вида $f(x(t, \tau), y(t, \tau), z(t, \tau))$.

Пусть $f(x, y, z)$ определена в прямоугольнике $R=[a, b; c, d; e, f]$, равномерно удовлетворяет в нем условию Липшица и имеет частные производные первого порядка, непрерывные относительно каждой пары переменных. Функции $x=x(t, \tau)$, $y=y(t, \tau)$, $z=z(t, \tau)$, определенные в прямоугольнике $S=[\alpha, \beta; \gamma, \delta]$, почти всюду в нем дифференцируемы (по Штольцу) и абсолютно непрерывны по t в $[\alpha, \beta]$, почти для всех τ в $[\gamma, \delta]$ (эти условия заведомо выполняются, если упомянутые три функции равномерно удовлетворяют в S условию Липшица). Кроме того, почти всюду в S $x_t'^2(t, \tau)+y_t'^2(t, \tau)+z_t'^2(t, \tau)>0$ и точка $(x(t, \tau), y(t, \tau), z(t, \tau))$ находится внутри R почти для всех пар (t, τ) из S. Тогда сложная функция $F(t, \tau)=f(x(t, \tau), y(t, \tau), z(t, \tau))$ почти всюду в S дифференцируема (по Штольцу). Г. М. Фихтенгольц

6418. О двух теоремах дифференциального исчисления. Куадруш-и-Кошта (Sobre dois teoremas do cálculo diferencial. Quadros e Costa J. M.), Técnica, 1956, 31, № 267, 177—184 (порт.)

Воспроизведение двух теорем с доказательствами, и замечания по поводу них.

Первая есть известная теорема Пеано о том, что обращение тождественно в нуль определителя Вронского, при дополнительных условиях, достаточно для наличия линейной зависимости между функциями, входящими в определитель.

Вторая, по словам автора, была установлена португальским математиком Мира Фернандес. Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ будут дифференцируемые в некотором промежутке функции, и $a_1<a_2<\ldots<a_n$ — точки этого промежутка, причем определитель, составленный из элементов $f_i(a_k)$ отличен от нуля. Тогда существует $n-1$ точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, содержащихся соответственно в промежутках $(a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$ и таких, что производные $f_1'(\alpha_j), \ldots, f_n'(\alpha_j)$ связаны линейным однородным соотношением, одним и тем же для всех $j=1, 2, \ldots, n-1$.

Замечания самого автора частью не новы и интереса не представляют. Г. М. Фихтенгольц

6419. Обобщенное понятие дифференциала. Заворский (Generalized concept of differential

Zawrosky A.), Repub. Venezuela. Bol. Acad. cienc. fis. mat. y natur., 1953, 16, № 49, 45—55 (исп.) Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 944.

6420. Замечание об одном неравенстве. Челльберг (A note on an inequality. Kjellberg Bo), Arkiv. mat., 1956, 3, № 3, 293—294 (англ.)

Высказываются некоторые соображения об оценке константы K в неравенстве

$$\int_0^\infty x^\alpha |f(x)|^\beta dx \leqslant K \left(\int_0^\infty x^{\alpha_1} |f|^{\beta_1} dx\right)^{\varkappa_1} \left(\int_0^\infty x^{\alpha_2} |f|^{\beta_2} dx\right)^{\varkappa_2}$$

В. В. Немыцкий

6421. О преобразовании некоторых определенных интегралов. Индзима (或る定積分の變換について。飯島泰蔵), 電氣試驗所彙報, Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1955, 19, № 8, 573—576 (японск.; рез. англ.)

Автор описывает метод, при помощи которого можно преобразовать определенный интеграл от действительных функций по конечному интервалу в определенный интеграл от аналитических функций по бесконечному интервалу; а именно, определенный интеграл

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — действительная интегрируемая в $(-1, 1)$ и $g(x)$ — действительная аналитическая в $(-\infty, \infty)$, преобразуется в следующее выражение:

$$I = J_m \left[\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty+\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} w(z)\, g(z)\, dz\right],$$

где $w(z) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{t-z} dt$, $z = x + iy$.

Кроме того, автор указывает обобщение этого метода и два примера. Ким Дзи Зен

6422. Об одной задаче расширения для функций с монотонными производными. Юркат (An extension problem for functions with monotonic derivatives. Jurkat W. B.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 184—191 (англ.)

Пусть $F(x)$ представляет n-й повторный интеграл от положительной неубывающей функции, для всех достаточно больших положительных x; ставится задача нахождения функции $f(x)$, также представляющей n-й интеграл от неубывающей функции для всех значений x (от $-\infty$ до $+\infty$) и обладающей свойством: $f(x) = F(x)$ для всех достаточно больших положительных x, $f(x) = 0$ для всех достаточно больших отрицательных x. Основной результат автора заключается в теореме: пусть $F(x)$ представляет L-функцию Харди (Hardy G. H., Orders of infinity, Cambridge Tract., 1924, p. 17), тогда необходимым и достаточным условием разрешимости поставленной задачи в случае $n \geqslant 2$ является следующее: $F(x)/x^n$ должно быть неубывающим для всех достаточно больших положительных x.

Для $n = 0$ и $n = 1$ решение всегда существует.

Намечены дальнейшие обобщения задачи и ее связи с теорией моментов. А. И. Попов

6423. Об экстремумах моментов функций двумерного распределения. Далль Альо (Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia. Dall'Aglio Giorgio), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1956, 10, № 1—2, 35—74 (итал.)

Пусть $A(x)$ и $B(y)$ — две вещественные возрастающие функции, для которых $A(+\infty) = B(+\infty) = 1$, $A(-\infty) = B(-\infty) = 0$. Через $\Gamma(A, B)$ обозначается класс функций $\Phi(x, y)$, у которых

$$\Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_1, y_2) - \Phi(x_2, y_1) + \Phi(x_2, y_2) \geqslant 0$$

$$(x_1 \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y_2),\ \Phi(x, +\infty) = A(x),\ \Phi(+\infty, y) = B(y),$$

$$\Phi(x, -\infty) = \Phi(-\infty, y) = 0.$$

Изучается вопрос о нахождении в $\Gamma(A, B)$ функции $\Phi(x, y)$, доставляющей экстремум интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - mx - p|^\alpha d\Phi(x, y) \qquad (\alpha \geqslant 1). \qquad (1)$$

Налагая на поведение функций $A(x)$ и $B(y)$ некоторые дополнительные условия, обеспечивающие конечность интеграла (1), удается получить полное решение проблемы: если $\alpha > 1$, то в $\Gamma(A, B)$ имеется только одна функция, доставляющая интегралу (1) наименьшее значение, и только одна функция, доставляющая ему наибольшее значение. Для $\alpha = 1$ находятся подобные функции, но они не единственны.

В качестве образцов приведем следующие результаты:

1. Если $\alpha = 1$, $m > 0$, то наименьшее значение интеграл (1) получает для функций $\Phi(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$\Phi(x, mx + p) = \min\{A(x), B(mx + p)\}.$$

Само это наименьшее значение равно

$$m \int_{-\infty}^{+\infty} |A(x) - B(mx + p)| dx.$$

2. Если $\alpha > 1$, $m > 0$, то наибольшее значение интеграл (1) получает тогда и только тогда, когда

$$\Phi(x, y) = \max\{A(x) + B(y) - 1, 0\},$$

а наименьшее тогда и только тогда, когда

$$\Phi(x, y) = \min\{A(x), B(y)\}.$$

Указываются и сами экстремальные значения интеграла. И. П. Натансон

6424 К. Общий курс математического анализа. (Конспект лекций). Романовский П. И. М., Оборонгиз, 1956, 341 стр., илл., беспл.

Книга является учебным пособием для студентов высших технических учебных заведений. В ней конспективно, но с большой четкостью и педагогическим мастерством изложен весь курс математического анализа для инженеров. Некоторые параграфы изложены более подробно, чем в других учебниках подобного типа (например, разделы, относящиеся к приближенным вычислениям, элементам теории функций комплексной переменной и др.). Книга может быть с большой пользой использована студентами во время подготовки к экзаменам.

Книга разбита на три части: 1) Введение в анализ. Определители и линейные системы. Дифференциальное исчисление. 2) Интегральное исчисление. Функции многих переменных. Числовые ряды. 3) Дифференциальные уравнения. Криволинейные и кратные интегралы. Функциональные ряды. М. К. Керимов

6425 К. Избранные главы анализа. Введение в классический анализ. Бранд (Advanced calculus. An introduction to classical analysis. Brand Louis. Wiley, 1955, 574 pp., 8.50 doll.) (англ.)

Книга представляет собой университетский курс математического анализа. Особенностями изложения яв-

ляются раннее изучение теории рядов (гл. 2), рассмотрение вопросов как в действительной, так и в комплексной области, широкое использование аппарата векторной алгебры и векторного анализа. Уделяется сравнительно мало внимания формальной технике дифференцирования и интегрирования функций, в частности отсутствует глава «Неопределенный интеграл»; по-видимому, предполагается некоторое знакомство читателя с элементами дифференциального и интегрального исчислений.

Приводим изложение по главам. В гл. 1 (Система чисел) аксиоматически рассматриваются числовые множества (группы, поля, натуральные числа, рациональные числа, действительные числа, комплексные числа). Теория вещественных чисел строится методом сечений Дедекинда. В гл. II (Последовательности и ряды) изучаются числовые и степенные ряды как в действительной, так и в комплексной областях. В гл. III (Функции действительной переменной) рассматриваются свойства непрерывных и дифференцируемых функций. Вывод производных элементарных функций отнесен в основном к упражнениям. В гл. IV (Функции нескольких переменных) подробно рассмотрены теоремы о неявных функциях и условия зависимости функций. В гл. V (Векторы) излагаются векторная алгебра и основные понятия векторного анализа. В гл. VI (Определенный интеграл) даются теория интеграла Римана и геометрические приложения определенного интеграла. В гл. VII (Несобственные интегралы) доказываются основные признаки сходимости несобственных интегралов. Рассматривается преобразование Лапласа. В гл. VIII (Криволинейные интегралы) при изложении используется векторный анализ. В гл. IX (Кратные интегралы) изучаются двойные и тройные интегралы и их приложения. В гл. X (Равномерная сходимость) доказываются основные теоремы о равномерно сходящихся последовательностях, рядах и интегралах. В гл. XI (Функции комплексной переменной) дается теория аналитических функций, включая ряды Тейлора и Лорана и теория вычетов. В гл. XII (Ряды Фурье) рассматриваются общие ортогональные ряды и тригонометрические ряды Фурье. Теорема сходимости тригонометрического ряда Фурье доказывается в предположении наличия ограниченных односторонних производных функции. Приводятся аппроксимативные теоремы Вейерштрасса и разбирается феномен Гиббса. В приложениях кратко трактуются следующие вопросы: 1. Точки сгущения. 2. Разностные уравнения. 3. Разностное исчисление. 4. Проверка однородности формул.

В тексте разобраны многочисленные задачи и примеры. В каждой главе имеются задачи для самостоятельной работы и дается резюме содержания. Приведено обзорное задание по всему курсу. В конце книги помещены ответы к задачам и предметный и авторский указатели. Б. П. Демидович

6426 К. **Анализ. 1. От основ к более сложному.** Ясуда (解析. 1. 其礎から完成へ。問題練習篇。安田秀雄。チ代田書房, 160 頁, 100 圓, Тиёда-сёбо, 1954, 160 стр., 100 иен (японск.)

6427 К. **Введение в высший анализ. Линделёф** (Einführung in die höhere Analysis. 2. Aufl. Lindelöf Ernst. Übers. aus dem Schwed. und Finn. Leipzig, Teubner, 1956, IX, 526 S., 14.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 24, 1703 (нем.)

6428 К. **Высшая математика. Задачник с вариантами контрольных работ и методикой решения задач. Камышко И. А.** Ленингр. инж.-строит. ин-т, Л., 1954 (вып. дан. 1955), 174 стр. с черт. Беспл.

6429 К. **Дифференциальное и интегральное исчисление. Тагамлицкий** (Диференциално и интегрално смятане. Тагамлицки Я.) София, Наука и изкуство, 1954, 692 стр. 28.50 лв. подв. (болг.)

6430 К. **Основы математического анализа. Учеб. пособие для студентов-заочников пед. ин-тов. Фролов Н. А.** М., Учпедгиз, 1955, 168 стр., илл., 2 р. 10 к.
См. РЖМат, 1955, 1348.

6431 К. **Дифференциальное и интегральное исчисление. Делаше** (Cálculo diferencial e integral. Delachet André. Trad. del franc. S. Paulo, Européia Livro, 1956, 125 p., 70 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1956, 4, № 2, 81 (порт.)

6432 К. **Введение в математический анализ. Джорджес, Кинни** (Introductory mathematical analysis. Georges Joel Samuel, Kinney J. M. Edwards, 1955, 605 pp., ill., 6 doll.), Cumul. Book Index, 1956, 59, № 7, 53 (англ.)

6433 К. **Дифференциальное и интегральное исчисление. Делаше** (Calcul différentiel et intégral. Delachet André. Paris, Presses univ. France, 1956, 128 p., ill, 153 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 24, 557 (франц.)

6434 К. **Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 3. Интегральное исчисление. Хаупт** (Differential- und Integralrechnung. Unter bes. Berücks. neuerer Ergebnisse. Bd 3. Integralrechnung. 2. völlig neubearb. Aufl. Haupt Otto. Berlin, de Gruyter, 1955, X, 319 S., ill., 28. — DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 24, 1703 (нем.)

6435 К. **Введение в анализ. Ч. I. Маркович** (Uvod u višu analizu. I. dio. 4. izd. Marković Zeljko. Zagreb, «Školska knjiga», 1956, XVI, 662 str., il.), Bibliogr. jugosl., 1956, 6, № 12, 449 (сербо-хорв.)

6436 К. **Курс математического анализа. Том 1. Часть 3. Интегральное исчисление. Йонеску, Кэлугэряну** (Curs de analiza matematică. Vol. I. Part. 3-a. Călculul integral. Ionescu D. V., Călugăreanu G. Ministerul Învăţămîntului, Cluj, 1956, 399 p., il.—Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 20—21, 801 (рум.)

6437 К. **Математический анализ. Федериги, Джулиано** (Analisi matematica. Federighi Urbano, Giuliano L. (Accad. navale Livorno). Livorno, Vol. I. 1954, XVI, 569, Vol. 2. 1955, XVI, 541 p.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 666, 432 (итал.)

6438 К. **Дифференциальное и интегральное исчисление. С введением в теорию дифференциальных уравнений. Лея** (Rachunek różniczkowy i całkowy. Ze wstępem do równań ró niczkowych. Wyd. 4. popr. Leja Franciszek. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 423, 1 nlb. s., il., 32.70 zł), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 25, 371 (польск.)

6439 К. **Лекции по интегральному исчислению функций одной переменной. Школьник А. Г.,** Моск. гор. пед. ин-т. М., 1956, 144 стр., илл., 6 р.

6440 К. **Дифференциальное и интегральное исчисление. Функции одной переменной. Учебн. пособие для студ. заочн. политехн. вузов. Разд. 2. Дифференциальное исчисление. Полозков А. П.** Всес. заочн. политехн. ин-т. М., 1957, 156 стр., илл., бесплл.

6441 К. **Примеры и задачи по дифференциальному исчислению. Абдуллаев Т. Г.** (Диференсиал һесабына аид мәсәлә вә мисаллар. (Тәдрис вәсаити). Абдулаев Т. һ. Бакы, Азәрб. ун-ти, 1957, 124 сәһ, 2 м. 40 гәп.) (азерб.)

6442 К. **Основы высшей математики для геолого-географического факультета. Ч. I. Аналитическая геометрия. Роман** (Curs de bazele matematicii superioare pentru facultatea de geologie-geografie.

Part 1-a. Geometria analitica. Roman Tiberiu. Univ. «C. I. Parhon», București, 1955, 108 p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 6, 209 (рум.)

6443 К. Лекции по математическому анализу. Т. I. Пиньедоли (Lezioni di analisi matematica. Vol. I. 2 ed. Pignedoli Antonio. Padova, Casa ed. dott. A. Milani, 1955, xv. 406 p., 3500 l.), Bibliogr. ital., 1956, № 657—659, 71 (итал.)

6444 К. Математический анализ. Т. 3. Погожельский (Analiza matematyczna. T. 3. Wyd. 5. niezmien. Pogorzelski Witold. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 202, 1 nlb. s., il., 15.50 zł), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 40, 602 (польск.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

6445. Матричные преобразования пространств последовательностей. Целлер (Matrixtransformationen von Folgenräumen. Zeller Karl), Rend. mat. e applic., 1953, 12, № 3—4, 340—346 (нем.)

Излагается общий метод для нахождения необходимых и достаточных условий для того, чтобы матричное преобразование $t = As$ или, подробнее,

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

переводило каждую последовательность $s = \{s_k\}$ пространства $\mathcal{E}$ в последовательность $t = \{t_n\}$ пространства $\mathfrak{F}$. Здесь $\mathcal{E}$ (а также $\mathfrak{F}$) — BK-пространство, т. е. банахово пространство последовательностей $s = \{s_k\}$, в котором отображения $s \to s_k$ непрерывны.

Принято говорить, что в пространстве $\mathcal{E}$ имеет место сходимость по отрезкам, если $\lim_{p\to\infty} \{s_0, \ldots, s_p, 0, 0, \ldots\} = s$ при всех $s \in \mathcal{E}$, где $\{s_0, \ldots, s_p, 0, 0, \ldots\}$ — отрезок. Доказывается: Если в пространстве $\mathcal{E}$ имеет место сходимость по отрезкам, то $t = As$ переводит $\mathcal{E}$ в $\mathfrak{F}$, если для каждого отрезка s имеем $As \in \mathfrak{F}$ и

$$\|As\|_{\mathfrak{F}} \leqslant M \|s\|_{\mathcal{E}} \ (M \text{ — постоянная}). \qquad (1)$$

Показывается, что условие (1) равносильно в случае $\mathcal{E} = l\left(\sum |s_k| < \infty\right)$ условию $\|a^k\|_{\mathfrak{F}} \leqslant M$, а в случае $\mathcal{E} = c_0 \left(\lim_{k\to\infty} s_k = 0\right)$ условию $\left\|\sum_{k\in K} a^k\right\|_{\mathfrak{F}} \leqslant M$, где $a^k = \{a_{nk}\}$ и K — любое конечное подмножество множества неотрицательных целых чисел. В качестве применения рассматриваются следующие известные случаи: 1) $\mathcal{E} = \mathfrak{F} = l$; 2) $\mathcal{E} = l$, $\mathfrak{F} = c_0$; 3) $\mathcal{E} = \mathfrak{F} = c_0$; 4) $\mathcal{E} = c_0$, $\mathfrak{F} = l$. В случае 3) опущено условие $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Г. Ф. Кангро

6446. Лакунарные теоремы обращения и лакунарная совершенность. Мейер-Кёниг, Целлер (Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit. Meyer-König W., Zeller K.), Math. Z., 1956, 66, № 3, 203—224 (нем.)

Дается новый подход к теоремам обращения для лакунарных рядов.

Пусть $A = (a_{ml})$ $(m, l = 0, 1, \ldots)$ — регулярный метод суммирования рядов, данный при помощи преобразования ряда в последовательность матрицей (a_{ml}). Поле суммирования $\mathfrak{A}$ метода A трактуется как некоторое FK-пространство, т. е. F-пространство последовательностей $\breve{u} = \{u_k\}$, в котором отображения $\breve{u} \to u_k$ непрерывны. Под F-пространством автор понимает полное линейное пространство, где топология задана счетным множеством псевдонорм $\|\breve{u}\|_i$, причем $\breve{u} = 0$ равносильно равенствам $\|\breve{u}\|_i = 0$ для всех i. Не исключен также случай, когда m — непрерывный параметр, причем тогда предполагается возможность превращения $\mathfrak{A}$ в FK-пространство.

Говорят, что метод A совершенный, если последовательности $u_l = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$, где перед единицей стоят l нулей, составляют основное множество в $\mathfrak{A}$. Автор называет метод A лакунарно-совершенным, если каждый метод $A^* = (a_{mk_l})$ $(0 \leqslant k_0 < k_1 < \ldots < k_l < \ldots)$ является совершенным. Множество тех $\breve{u} \in \mathfrak{A}$, которые можно аппроксимировать в $\mathfrak{A}$ отрезками (т. е. последовательностями с конечным числом отличных от нуля элементов), имеющими равные нулю элементы по крайней мере там, где это имеет место при $\breve{u}$, называется лакунарно-совершенной частью поля $\mathfrak{A}$. Например, в случае метода суммирования Бореля B, лакунарно-совершенная часть поля содержит все те B-суммируемые ряды $\sum u_k$, при которых $\sum u_k z^k$ сходится в окрестности $z = 0$. Доказывается, что метод A представляет собой лакунарно-совершенный метод суммирования тогда и только тогда, когда лакунарно-совершенная часть поля $\mathfrak{A}$ совпадает с $\mathfrak{A}$. При помощи этого критерия устанавливается лакунарная совершенность методов суммирования Чезаро, Абеля, рядов Дирихле (обобщенных методов Абеля) и Эйлера-Кнопа (Харди Г., Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951).

Следующая теорема является центральной в статье: Если из условий

$$u_k = 0 \ \text{ при } \ k \neq k_l \quad (l = 0, 1, \ldots) \qquad (1)$$

и $\breve{u} \in \mathfrak{A}$ вытекает сходимость ряда $\sum u_k$ с ограниченными частными суммами, то (1) влечет за собой сходимость каждого ряда $\sum u_k$ в лакунарно-совершенной части $\mathfrak{A}$.

Используя некоторые тауберовы O-теоремы, при помощи этой теоремы без труда доказываются известные лакунарные теоремы обращения для методов суммирования, перечисленных выше.

Особенно простой метод для вывода лакунарных теорем обращения получается в случае, когда в множестве последовательностей, суммируемых методом A к нулю, имеет место сходимость по отрезкам (реф. 6445).

Г. Ф. Кангро

6447. О построении методов суммирования, которые являются эквивалентными и несовместными. Вучкович (Sur la construction des méthodes de limitation qui sont équivalentes et pas consistentes. Vučković Vladeta), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, 10, 89—96 (франц.)

Пусть $\{p_n\}$ — действительная, убывающая к нулю последовательность. Обозначим через P множество всех последовательностей вида $\{\tau_n + c/p_n\}$, где c — действительное постоянное число, а $\{\tau_n\}$ — сходящаяся действительная последовательность, удовлетворяющая условию

$$\tau_n - \tau_{n-1} = o\left(\frac{p_{n-1} - p_n}{p_{n-1}}\right), \ n \to \infty.$$

Доказываются следующие предложения:

1. Для того чтобы последовательность $\{u_n\} \in P$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$U_1 = u_1, \ U_n = \frac{u_n p_n - u_{n-1} p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}, \ n = 2, 3, \ldots$$

была сходящейся.

2. Для того чтобы последовательность $\{u_n\} \in P$, необходимо и достаточно, чтобы сходилась последовательность

$$V_1 = u_1,\ V_n = \frac{p_n u_n - p_{n-1} u_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} + p_n u_n,\ n = 2, 3, \ldots$$

Используя доказанные предложения, автор дает общий прием построения двух регулярных методов суммирования, обладающих одинаковыми областями суммируемости, но не являющихся совместными.

М. Д. Калашников

6448. **Совместные методы суммирования. Питерсен** (Consistent summability methods. Petersen G. M.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 62—65 (англ.)

Два регулярных метода суммирования именуются совместными, если две ограниченные последовательности, суммируемые каждым из методов, суммируются ими к одному и тому же пределу. Теорема. Существуют два регулярных линейных совместных метода суммирования с положительной матрицей такие, что не существует линейного регулярного метода суммирования с положительной матрицей, который был бы сильнее, чем каждый из этих методов суммирования.

И. И. Огиевецкий

6449. **Существование и классификация произведений суммирующих матриц. Рамануджан** (Existence and classification of products of summability matrices. Ramanujan M. S.), Proc. Indian Acad. Sci., 1956, A44, № 4, 171—184 (англ.)

Пусть c — пространство сходящихся последовательностей, c_0 — пространство нуль-последовательностей, γ — пространство сходящихся рядов, γ_0 — пространство сходящихся рядов с суммой, равной нулю.

Если матрица $A = (a_{nk})$ преобразует точки пространства X в точки пространства Y, то мы будем писать $A \subset \Gamma(X, Y)$.

Сохраняющую сходимость матрицу A, преобразующую последовательность $\{s_k\}$ в последовательность $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, будем называть K-матрицей, а регулярную — T-матрицей. Матрица A — умножающая на ρ или $A \subset \Gamma(c, \rho c)$, если из $\lim_{k\to\infty} s_k = s$ следует, что $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \rho c$.

Матрица $F = (f_{nk})$, преобразующая ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ в последовательность $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_{nk} u_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется β-матрицей, если из сходимости $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ всегда следует сходимость $\{t_n\}$. Если $\lim_{n\to\infty} t_n$ равен сумме ряда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, то F является γ-матрицей.

Матрица $H(h_{nk})$, преобразующая ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, где $v_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_{nk} u_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется δ-матрицей, если из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ всегда следует сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Если, кроме того, суммы рядов $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ всегда равны между собой, то H является α-матрицей.

Матрица $P = (p_{nk})$, преобразующая последовательность $\{s_k\}$ в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, где $v_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} s_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется λ-матрицей, если из сходимости последовательности $\{s_k\}$ всегда следует сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Если, кроме того, сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ всегда равна $\lim_{k\to\infty} s_k$, то P является μ-матрицей.

Из доказанных теорем отметим следующие:

1. Если $A \subset \Gamma(c, \rho c)$, $B \subset \Gamma(c, \rho' c)$, то $AB \subset \Gamma(c, \rho\rho' c)$.

2. Если $A \subset \Gamma(c, \rho c)$, а H есть δ-матрица, то $AH \subset \Gamma(\gamma, c_0)$.

3. Если P — λ-матрица, то произведение PA существует и является λ-матрицей тогда и только тогда, когда A есть K-матрица.

4. Если P — μ-матрица, то произведение PA существует и является μ-матрицей тогда и только тогда, когда A есть T-матрица.

5. Произведение AP любой K-матрицы A с λ-матрицей P есть K-матрица.

6. Множество всех λ-матриц образует банахово пространство.

7. Пусть P и Q — две конечностроочные μ-матрицы и пусть P имеет левостороннюю обратную матрицу ${}^{-1}P$. Тогда метод Q включает метод P тогда и только тогда, когда ${}^{-1}P$ есть γ-матрица.

8. Если P и Q — две конечностроочные μ-матрицы и существует конечностроочная матрица H такая, что $Q = HP$, то метод Q включает метод P.

М. Д. Калашников

6450. **Дифференцирование и интегрирование рядов. Чжэн Цзянь-цзе** (對級數取微商和取積分. 鄭鑑杰), 數學通訊, Шусюэ тунсюнь, 1956, № 59, 6—13 (кит.)

Рассматривается ряд $S_n = \sum_{n=1}^{n} f(n)$. Предполагается, что если n рассматривается как «непрерывное переменное» ($1 \leqslant n < +\infty$), то функция $f(n)$ дифференцируема по n, и что существует непрерывная функция $F(n)$ такая, что $F(n+1) - F(n) = f(n)$. Тогда простыми вычислениями автор доказывает следующую формулу:

$$d/dn \left(\sum_{n=1}^{n} f(n) \right) = \sum_{n=1}^{n} f'(n) - c, \qquad (1)$$

где c — некоторая константа. Эта формула может быть написана также в виде

$$\sum_{n=1}^{n} f(n) = \int \left(\sum_{n=1}^{n} f'(n) \right) dn - (cn + c_1). \qquad (2)$$

Если вместо дифференцируемости $f(n)$ предположить, что $f(n)$ непрерывна, тогда из (1) и (2) имеем:

$$\frac{d}{dn} \left(\sum_{n=1}^{n} \int f(n)\, dn \right) = \sum_{n=1}^{n} f(n) - c. \qquad (1')$$

$$\sum_{n=1}^{n} \int f(n)\, dn = \int \left(\sum_{n=1}^{n} f(n) \right) dn - (cn + c_1) \qquad (2')$$

Используя формулы (1), (2), (1'), (2'), автор выводит известные формулы для сумм $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum 1/n$, $\sum 1/n^k$, $\sum \log n$.

Дун Хуай-юнь

6451. **Доказательство разложимости функции, обладающей особенностью, в ряд по собственным функциям. Ильин В. А.**, Докл. АН СССР, 1956, 109, № 1, 21—24

Пусть $\{u_i(p)\}$ и $\{\lambda_i\}$ суть собственные функции и соответствующие им характеристические числа уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, заданного в n-мерной произволь-

ной области G с однородным краевым условием любого из трех родов. Рассматривается ряд Фурье

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{(\alpha-n)/2} u_i(P)\, u_i(Q) \qquad (1)$$

функций $K_{\frac{n-\alpha}{2}}(P, Q)$. Автором было показано (РЖМат, 1956, 6596), что если $0<\alpha<1$, то $K_{\frac{n-\alpha}{2}} = C_\alpha^{-1} r_{PQ}^{-\alpha} + x_\alpha(P, Q)$, где $C_\alpha = \text{const}$ и x_α — функция, имеющая непрерывные производные любого порядка, а при $\alpha = 0$ $K_{\frac{n}{2}}$ имеет логарифмическую особенность. Доказывается, что при указанных значениях α ряд (1) сходится (при суммировании в порядке возрастания λ_i) равномерно к $K_{\frac{n-\alpha}{2}}$ во всякой внутренней подобласти области G, из которой удалена произвольная окрестность особой точки. М. М. Вайнберг

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

6452. О нулях некоторых классических полиномов и их асимптотике. Дьёльфе (Sobre los ceros de los polinomios ortogonales clasicos, en el caso asintotico. Dieulefait Carlos E.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, **17**, 25—27 (исп.)

Небольшое замечание о нулях полиномов $P_n(x)$, связанных с гипергеометрическими функциями.

В. В. Немыцкий

6453. Приведение эллиптических интегралов в вещественной области к каноническим формам. Родригес-Санхуан (Reducción dentro del campo real de las integrales elípticas a formas canónicas. Rodríguez Sanjuán Antonio), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1956, 50, № 1, 19—133 (исп.)

Главная цель этого обширного мемуара — указать наиболее простые пути для приведения вещественных эллиптических интегралов к каноническим формам, без введения комплексных параметров.

Пусть $P = P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $y = \sqrt{P}$, $R(x, y)$ — рациональная функция от x и y. Тогда эллиптический интеграл $\int R(x, y)\, dx$ вещественным образом приводится к интегралам

$$I_r = \int \frac{x^r}{y}\, dx, \qquad J_r = \int \frac{dx}{(x-h)^r y}$$

$$(r = 0, 1, 2, 3, \ldots) \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$L_r = \int \frac{mx+n}{(x^2+2px+q)^r y}\, dx \quad (p^2 - q < 0).$$

$$(r = 1, 2, 3, \ldots)$$

По мнению автора, целесообразнее пользоваться интегралами L_r, чем интегралами J_r с мнимыми h. Все интегралы I_r приводятся к I_0, I_1, I_2; интегралы J_r — к I_0, I_1, I_2 и J_1; наконец, интегралы L_r — к I_0, I_1, I_2 и L_1.

Основная теорема мемуара устанавливает, что каждый интеграл L_1 приводится, помимо элементарных интегралов, к одному члену с I_0 и к сумме интегралов J_1 — с вещественными h. Итак, каждый эллиптический интеграл в вещественной области выражается через элементарные функции и интегралы I_0, I_1, I_2, J_1 и притом — независимо от формы многочлена $P = y^2$, т. е. без использования канонических форм Лежандра.

С другой стороны, если воспользоваться этими каноническими формами, то каждый эллиптический интеграл, оставаясь в вещественной области, можно выразить через элементарные функции, интегралы Лежандра 1-го, 2-го и 3-го рода и еще через вещественный интеграл

$$M(m'x^2 + n') = \int \frac{m'x^2 + n'}{(x^4 + 2p'x^2 + q')\, y}\, dx$$

$$(p'^2 - q' < 0;\ y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)).$$

Относительно последнего интеграла показывается, что он выражается через интегралы вида $L(mx+n)$.

Автор обобщает известную формулу Эрмита (Остроградского) на случай эллиптических интегралов, выделяя из них алгебраическую часть. Перенесение исследований автора на случай гиперэллиптических интегралов будет предметом особой работы. Мемуар завершается некоторыми указаниями, относящимися к интегралам

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

в вещественной области. Г. М. Фихтенгольц

6454. Правильно растущие функции и интеграл Фруллани. Алянчич, Карамата (Правилно променљиве функције и Frullani-ев интеграл. Аљанчић С., Карамата Ј.) Зб. радова. Српска АН, 1956, **50**, 239—248 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Коши (1823) и Фруллани (1828) рассматривали интеграл

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \lim_{\substack{x' \to +0 \\ x'' \to \infty}} \int_{x'}^{x''} \qquad (a>0,\ b>0)$$

и установили, что он сходится и имеет значение $(f_0 - f_\infty) \ln \frac{b}{a}$, если функция интегрируема в любом конечном промежутке, не содержащем нуля, и существуют пределы

$$f_0 = \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad f_\infty = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Иенгар (1940) заменил в этом утверждении пределы в собственном смысле — «C-пределами»:

$$f_0 = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} \int_{+0}^{x} f(t)\, dt, \quad f_\infty = \lim_{x \to \infty} x \int_{x}^{\infty} \frac{f(t)}{t^2}\, dt,$$

причем существование обобщенных пределов оказалось не только достаточным, но и необходимым для сходимости интеграла Фруллани при любых a, $b > 0$.

Авторы работы связывают этот вопрос с некоторым классом функций, введенных еще в 1930 г. вторым из авторов. Функция $p(x)$ называется правильно растущей в окрестности бесконечности, если она имеет постоянный знак, интегрируема в каждом конечном промежутке и если предел

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(\lambda x)}{p(x)}$$

существует для каждого $\lambda > 0$. (В этом случае он необходимо имеет вид λ^{α}).

Существование интеграла Фруллани при любых a, $b > 0$ можно свести к случаю $a = 1$, $b = \lambda$ и связать с вопросами о наличии предела для интеграла

$$\int_x^{\lambda x} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

как при $x \to +0$, так и при $x \to \infty$. Так как эти вопросы простым преобразованием приводятся один к другому, ограничимся вторым из них. Определяя функцию $p(x)$ равенством

$$\ln p(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt,$$

видим, что предыдущий интеграл равен $\ln \dfrac{p(\lambda x)}{p(x)}$, и для существования предела этого интеграла при $x \to \infty$, каково бы ни было $\lambda > 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $p(x)$ была правильно растущей в окрестности бесконечности.

Используя теорию правильно растущих функций, отсюда можно заново получить результаты Йенгара.

Г. М. Фихтенгольц

6455. Новый класс разложений в непрерывные дроби для отношений гипергеометрических функций. Франк (A new class of continued fraction expansions for the ratios of hypergeometric functions. Frank Evelyn), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **81**, № 2, 453—476 (англ.)

Повторным применением соотношений Гаусса для гипергеометрических функций получены разложения в непрерывные дроби вида:

$$\frac{1 + a_1 z}{b_1 z + 1} + \frac{a_2 z}{b_2 z + 1} + \frac{a_3 z}{b_3 z + 1} + \ldots$$

следующих функций: 1) $F(a, b, c, z) : F(a, b+1, c, z)$; 2) $F(a, b, c, z) : F(a, b, c+1, z)$; 3) $F(a, b, c, z)$: $F(a, b+1, c+1, z)$; 4) $F(a, b, c, z)$: $F(a+1, b+1, c+1, z)$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$; для отношения 3), например, $a_k = (a+k-1)(b+1-c-k) : (c+k-1)(c+k)$; $b_k = (a+k-b-1) : (c+k)$. Изучен вопрос о сходимости формально найденных разложений. Так, для разложения, порожденного отношением 3), доказано, что оно сходится к нему при $|z| < 1$, тогда как при $|z| > 1$ оно сходится к

$$b(a-c)\, F(a,\ a+1-c,\ a+1-b,\ 1/z):$$

$$c(a-b)\, F(a,\ a-c,\ a-b,\ 1/z);\quad a - b \neq 0, -1, \ldots$$

(за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, являющихся полюсами соответствующих функций). Аналогичные результаты установлены для случаев 1), 2) и 4). Рассмотрены также соответствующие разложения для отношений некоторых вырождеенных гипергеометрических функций.

М. Н. Олевский

6456. Действительные нули вырожденной гипергеометрической функции. Слейтер (The real zeros of the confluent hypergeometric function. Slater L. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, № 4, 626—635 (англ.)

Пусть c — действительный корень решения $y(x)$ дифференциального уравнения $xy'' + (b-x)y' = ay$, k — первое приближение этого корня. Автор формально находит разложение в ряды c и $y'(c)/y'(k)$ по степеням $y(k)/y'(k)$. Аналогичные разложения по степеням $y'(k')/(k'^2 y(k'))$ даны для c' и $y(c')$ где c' — корень $y'(x)$, k' — его первое приближение. Эти результаты, по мнению автора, пригодны для числовых расчетов на обычных счетных машинах. Если же для достижения высокой точности вычислений пользоваться электронными счетными машинами, то для $yx \equiv {}_1F_1(a, b; x)$ удобнее иметь дело с приближениями по методу Ньютона: $x_{n+1} = x_n - y(x_n)/y'(x_n)$, $x_0 \equiv k$, учитывая, что ${}_1F_1(a, b; x) = a_1 F_1(a+1, b+1; x)/b$ (k может быть взято по формуле Трикоми).

Указывается также процесс получения последовательных приближений для корней уравнения ${}_1F_1(a, b; x) = 0$, когда зафиксированы a и x или b и x. Сообщается, что указанные приемы вычисления были программированы и испытаны на электронной счетной машине EDSAC I в Математической лаборатории Кэмбриджского университета. Приводится таблица (семизначная) наименьших действительных корней функции от $x\ {}_1F_1(a, b; x)$ в следующих интервалах для a и b: $a = -4{,}0\ (0{,}2) -1{,}0\ (0{,}1) -0{,}1$, $b = 0{,}1\ (0{,}1)\ 1{,}2\ (0{,}2)\ 2{,}4$.

М. Н. Олевский

6457. Интегральное равенство. 1. Кошти (Laugurecy of integrals. I. Koshti M. E.) J. Univ. Poona. Sci. and Technol., 1953, № 4, 116—118 (англ.)

Показано, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_r(x) H_n(x)\, dx = a_{r,n}$, где

$$\sqrt{\pi}\, \exp\left(1/4\, t^2/(1-t)^2\right)(-t)^n/(1-t)^{n+1} = \sum_{r=0}^{\infty} a_{r,n} t^r,$$

$|t| < 1$; $L_r(x)$ и $H_n(x)$ — соответственно многочлены Лагерра и Эрмита.

М. Н. Олевский

6458. Операторное равенство. 2. Кошти The operational identity. 2. Koshti M. E.), J. Univ. Poona. Sci. and Technol., 1953, № 4, 119—120 (англ.)

Часть 1 см. реф. 6457. Доказывается равенство

$$\left(\overline{ax+b}\,\frac{d}{dx}\right)_{r,a} y = (ax+b)^r \frac{d^r y}{dx^r},$$

где левая часть обозначает

$$\left(\overline{ax+b}\,\frac{d}{dx}\right)_{r,a} = \left(\overline{ax+b}\,\frac{d}{dx}\right)\left(\overline{ax+b}\,\frac{d}{dx} - a\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\overline{ax+b}\,\frac{d}{dx} - \overline{r-1}\,a\right)$$

при постоянных a и b. Указывается приложение равенства к интегрированию линейного дифференциального уравнения частного вида.

Н. А. Бразма

6459. Установление сходимости некоторых рядов. Приложение к вычислению некоторых эллиптических интегралов. Эпстейн, Френч (Improving the convergence of series: application to some elliptic integrals. Epstein Leo F., French Nancy E.), Amer. Math. Monthly, 1956 **63**, № 10, 698—704 (англ.)

Указываются некоторые методы вычисления интегралов

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\infty} (1 - k^2 \sin^2 x)^{-1/2}\, dx,$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\infty} (1 - k^2 \sin^2 x)^{1/2}\, dx.$$

В. В. Немыцкий

6460. О некоторых полиномах Тушара. Уайман, Мозер (On some polynomials of Touchard. Wyman Max, Moser Leo), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 321—322 (англ.)

В одной из предыдущих работ Тушар рассмотрел полиномы $Q_n(x)$, определенные рекуррентной формулой ($n \geqslant 0$)

$$Q_{n+1}(x) = (2x+1)\,Q_n(x) + n^4/(4n^2-1)\,Q_{n-1}(x),$$

$$Q_{-1}(x) = 0,\ Q_0(x) = 1.$$

В этой работе авторы находят явное выражение полинома $Q_n(x)$, а именно

$$Q_n(x) = 2^n n! \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} \binom{2x+n-2r}{n-2r} \binom{x}{r}^2.$$

Н. Обрешков

6461. О некоторых интегралах. Видьясагар (On certain integrals. Vidyasagar G. C.), Ganita, 1954, 5, № 1, 61—68 (англ.)

Пользуясь известными соотношениями операционного исчисления, автор вычисляет (при соответствующих ограничениях на параметры) интегралы

$$\int_0^\infty J_p(cx)\,{}_2F_3(\alpha,\ \alpha+1/2);\ \beta,\ 2\alpha,\ 1;\ -x^2)\,x^{1-p}\,dx,$$

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} K_p(ax)\,J_\nu(bx)\,I_\nu(bx)\,dx$$

и некоторые другие, частично известные (см., например, на стр. 93 формулу 36 в книге Эрдейи; РЖМат, 1955, 3285).

Примечание референта. Полученное автором (в § 1) равенство, выражающее произведение $x^{-\mu}y^{-\nu}I_\mu(x)\,I_\nu(y)$ в виде гипергеометрической функции ${}_2F_3$ от аргумента xy, при произвольных x и y неправильно (поскольку функциональное уравнение $f_1(x)\,f_2(y) = f_3(xy)$; $x>0$, $y>0$ имеет в классе непрерывных функций лишь следующие решения: $f_i(x) = C_i x^a$, где C_1, C_2 и a — произвольные постоянные, $C_3 = C_1C_2$); при $x=y$ оно известно (там же, стр. 11, формула 49). М. Н. Олевский

6462 Д. Ортогональные функции Эрмита от многих переменных и соотношения неопределенности Хейзенберга. Простые (стационарные) цепи Маркова и их корреляции. Тортра (Les fonctions orthogonales d'Hermite à plusieurs variables et relations d'incertitude de Heisenberg. Les chaînes simples constantes de Markoff et leurs correlations. Tortrat Albert. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris, 1950, Paris, Gauthier-Villars, 1953, 97 p.) (франц.)

Реферируемая работа представляет собой механическое соединение двух работ на разные темы.

Первая работа: Ортогональные функции Эрмита от многих переменных и соотношение неопределенностей Хейзенберга, посвящена теории полиномов Эрмита от r переменных $x_1, \ldots, x_r$, принадлежащих положительно определенной квадратичной форме $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}x_ix_j$. Заменяя переменные x_i переменными $\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^r a_{ij}x_j$, причем $x_i = \sum_{j=1}^r \beta_{ij}\xi_j$, получаем:

$$\varphi(x) = \psi(\xi) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \beta_{ij}\xi_i\xi_j;\ x_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}$$

(форма $\psi(\xi)$ — взаимная с $\varphi(x)$).

Введя еще переменные $h_1, h_2, \ldots, h_r$ и $k_1, k_2, \ldots, k_r$, связанные уравнениями

$$k_i = \sum_{j=1}^r a_{ij}h_j;\quad h_i = \sum_{j=1}^r \beta_{ij}k_j,$$

мы определяем полиномы Эрмита $H^{[\varphi]}_{n_1,\ldots,n_r}(x)$ и $G^{[\varphi]}_{n_1,\ldots,n_r}(x)$ разложениями по степеням $h_1, \ldots, h_r$ и соответственно $k_1, \ldots, k_r$.

Свойство ортогональности и норма полиномов Эрмита выражаются уравнением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} H^{[\varphi]}_{n_i}(x)\,G^{[\varphi]}_{n_j}(x)\,e^{-\varphi(x)}dx = a^2_{n_i}\delta_{ij},$$

где n_i и n_j — две r-членные системы индексов, а

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } n_i \neq n_j, \\ 1, & \text{если } n_i = n_j. \end{cases}$$

Нормированные функции Эрмита определяются формулами

$$\psi^{[\varphi]}_{n_i} = \frac{e^{-\varphi/2}H^{[\varphi]}_{n_i}}{a_{n_i}};\quad \chi^{[\varphi]}_{n_i} = \frac{e^{-\varphi/2}G^{[\varphi]}_{n_i}}{a_{n_i}}.$$

Полиномы $H_{n_i}(x)$ и функции $\psi_{n_i}(x)$ являются собственными функциями некоторых ядер $L(x, y, t)$ и соответственно $K(x, y, t) = e^{-\varphi(x)/2}L(x, y, t)\,e^{\varphi(x)/2}$. Вид ядра L определяется. При $t_1 = t_2 = \ldots = t_r = 0$ ядро K принимает вид $e^{-[\varphi(x)+\varphi(y)]/2}$ и является положительно определенным. Для всех значений параметров t_i, для которых K — положительно определенное ядро, имеет место разложение

$$K(x, y, t) = \sum_i t_i^{n_i}\psi^{[\varphi]}_{n_i}(x)\,\chi^{[\varphi]}_{n_i}(y),$$

где суммирование производится по всем r-членным системам $n_i = (n_1, \ldots, n_r)$ целых положительных чисел.

Эти результаты применяются при вычислении дисперсии переменной q, закон вероятности которой определяется волновой функцией $\psi(q)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q)|^2\,dq < \infty,\ \int_{-\infty}^{\infty} q\,|\psi(q)|^2\,dq = 0.$$

Среднее отклонение величины q определяется формулой

$$\sigma = \Delta q = \|q\psi\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} q^2\,|\psi|^2\,dq}$$

и выводится неравенство, эквивалентное соотношению неопределенности Хейзенберга. Часть II работы, см. реф. 6511. Ю. Л. Рабинович

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6463. О некоторых теоремах в операционном исчислении для функций двух переменных. Чакраварти (On certain theorems in operational calculus with two variables. Chakravarty N. K.), Ganita 1953, 4, № 2, 129—130 (англ.)

Обобщение одной теоремы, доказанной в диссертации Делерю (Delerue, Thesis for the D. Sc. degree of

the University of Montepellier, 1951) для $\mu_1 = \mu_2 = 2$. Если $\varphi(p) \doteqdot f(x)$, то

$$\frac{p^{\mu_1-\lambda_1} q^{\mu_2-\lambda_2}}{p^{\mu_1}+q^{\mu_2}} \varphi\left(\frac{1}{p^{\mu_1}}+\frac{1}{q^{\mu_2}}\right) \doteqdot$$

$$\doteqdot x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} \int_0^\infty J_{\lambda_1}^{\mu_1}(sx^{\mu_1})\, J_{\lambda_2}^{\mu_2}(sy^{\mu_2})\, f(s)\, ds,$$

где $J_\lambda^\mu(x)$ — обобщение бесселевой функции, предложенное Райтом (Wright E. M., J. London Math. Soc., 1935, 10, 287; Proc. London Math. Soc., 1935, 38, 257; 1940, 46, 389). А. И. Лурье

6464. **О возрастании операторной функции $\exp(-s^\alpha\lambda)$. Микусинский** (Sur la croissance de la fonction operationnelle $\exp(-s^\alpha\lambda)$. Mikusiński J.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 7, 423—425 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 7, 415—417

Автор оценивает порядок роста функции

$$F_\alpha(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(zt - z^\alpha\lambda)\, dz,$$

$$\lambda > 0,\ t \geqslant 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

операторное представление которой есть $\exp(-s^\alpha\lambda)$, где s — оператор дифференцирования по t. Доказывается, что для λ/t^α существует точная оценка

$$F_\alpha(\lambda, t) < (\alpha\lambda/t)^{1/(1-\alpha)} \exp\left[-(1-\alpha)\,\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}\,(\lambda/t^\alpha)^{1/(1-\alpha)}\right].$$

S. Drobot

6465 К. **Руководство по теории преобразований Лапласа. Дёч** (Handbuch der Laplace—Transformation. Bd. 2. Anwendung d. Laplace—Transformation. Abt 1. Doetsch Gustav. Basel—Stuttgart, Birkhäuser, 1955, 436 S., 56.15 Sfr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 31, 2200 (нем.).

6466 К. **Таблицы интегральных преобразований. Эрдейи** (Tables of integral transforms. Based, in Part, on Notes Left by Harry Bateman, and Compiler by the Staff of the Bateman Manuscript Project. Erdélyi Arthur (Ed.), Vol. 1, XX, 391 pp., tables, New York, London, McGraw-Hill, 1954, 60 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 253, 13 (англ.)

См. также: 6123, 6336, 6349, 6370, 6382, 6502

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

6467. **О некоторых проблемах функционального анализа. Гельфанд И. М.,** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 3—12

Указываются некоторые проблемы, представляющие интерес для дальнейшего развития функционального анализа, но не разрабатываемые достаточно в настоящее время.

1. Линейные топологические пространства, в частности «нуклеарные пространства» Гротендика. Проблемы о построении меры в линейных топологических пространствах, в частности в нуклеарных, и об определении пространств по скорости их аппроксимации конечномерными пространствами.

2. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Проблемы: общая постановка краевой задачи в форме задачи об операторе, действующем из одного линейного топологического пространства в другое и имеющего непрерывный обратный; вопрос о перечислении всех корректных в этом смысле краевых задач; вопрос о вычислении индекса краевой задачи, т. е. разности между числом линейно независимых решений однородной задачи и числом условий, налагаемых на правую часть неоднородного уравнения для его разрешимости; условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнений с кусочно-разрывными коэффициентами; единственность решения задачи Коши для эллиптических уравнений любого порядка с непрерывными коэффициентами.

3. Квазилинейные уравнения. Проблема о существовании, единственности и устойчивости решения задачи Коши в классе кусочно-непрерывных функций с условиями устойчивости относительно малых возмущений на линиях разрыва.

4. Меры в функциональных пространствах. Указывается на желательность развития этого раздела анализа для квантовой теории поля, теории случайных процессов, теории информации, статистической физики.

5. Кольца типа II_1. Вопрос о реализации этого типа колец операторов в анализе — возможно, в форме колец операторов над пространствами с винеровской мерой.

6. Гипергеометрические функции. Проблема о построении теории гипергеометрических функций нескольких переменных, опирающейся на результаты и методы теории представлений компактных или локально компактных групп Ли, аналогично тому, как гипергеометрические функции одного переменного могут быть изучены с помощью теории представлений простейших классических групп (группы вращений сферы и плоскости Лобачевского). Г. Е. Шилов

6468. **Необходимое условие продолжения линейных и непрерывных отображений в паранормированных модулях. Гика** (Necesitatea condiţiei de prelungire a aplicaţiilor liniare şi continue în module paranormate. Ghika Al.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 6, 955—958 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть A — алгебра с единицей 1 над полем действительных чисел, S — такая конечная система образующих в A, что $S = -S$ и S есть мультипликативная группа с единицей 1.

Пусть далее E и E' — левые унитарные A-модули с такими нормами $p(x)$ и $p'(x)$ соответственно, что $p(\alpha x) = p(x)$, $p'(xy) = p'(y)$ для любых $\alpha \in S$, $x \in E$ и $y \in E'$. Семейство C множеств из E' обладает свойством бинарного пересечения, если для любого подсемейства C_1 из E' пересечение всех множеств из C_1 не пусто, если пересечение любых двух множеств C_1 не пусто.

Формулируется без доказательства следующая теорема: Для того чтобы для любого модуля E любое линейное отображение в E' подмодуля из E могло быть продолжено на все E с сохранением нормы, необходимо и достаточно, чтобы семейство всех замкнутых шаров в E' имело свойство бинарного пересечения.

Не ясно, как эта теорема согласуется с известной теоремой о возможности продолжения с сохранением нормы функционалов в комплексных банаховых пространствах (в этом случае не выполняется свойство бинарного пересечения семейства всех кругов комплексной плоскости E'). З. Л. Лейбензон

6469. **Об одном методе исследования выпуклых множеств. Рубинштейн Г. Ш.**, Докл. АН СССР, 1955, 102, № 3, 451—454

Рассматривается вещественное линейное пространство E и в нем выпуклое множество M, замкнутое в том смысле, что если интервал $\alpha x+(1-\alpha)y$ $(0<\alpha<1)$ содержится в M, то его концы x, y тоже содержатся в M.

Вводится упорядочение: $x\leqslant y$ $(x,\ y\in M)$, если при некотором $\varepsilon>0$ выполнено включение $y+\varepsilon(y-x)\in M$. Каждому элементу $x\in M$ ставится в соответствие линейное многообразие $L(x)$ — множество таких элементов $y\in E$, что при некотором $\varepsilon>0$ справедливо включение $x\pm\varepsilon(y-x)\in M$. Гранью множества M называется всякое множество $\Gamma(x)=L(x)\cap M$, при этом $L(x)$ называется соответствующим грани $\Gamma(x)$ линейным многообразием. Грань $\Gamma(x)$ называется минимальной, если $\Gamma(x)=L(x)$.

Из равносильности утверждений

$$x\leqslant y;\ x\in\Gamma(y);\ \Gamma(x)\subset\Gamma(y);\ L(x)\subset L(y)$$

выводится рефлексивность и транзитивность соотношения $\leqslant$. Отсюда вытекает, что выпуклые множества можно классифицировать по структурам следования их элементов.

Предельным конусом $K(M)$ называется множество таких элементов $y\in E$, что $x+\lambda y\in M$ при $0<\lambda<\infty$; предельным линейным многообразием $\varepsilon(M)$ — множество таких элементов $y\in E$, что $x+\lambda y\in M$ при $-\infty<\lambda<\infty$. Отмечается, что $K(M)$ и $\varepsilon(M)$ не зависят от выбора элемента $x\in M$.

Формулируется следующая теорема 1: Если M не содержит бесконечных строго убывающих последовательностей $x_1>x_2>\ldots$, то все точки множества M и только они представимы в виде $\sum_\alpha\theta_\alpha x_\alpha+\sum_\beta d_\beta y_\beta+\sum_\gamma c_\gamma z_\gamma$, где $\{x_\alpha\}$ — точки, выбранные по одной на каждой минимальной грани множества M; $\{y_\beta\}$ — точки, выбранные по одной на каждой грани конуса $K(M)$; $\{z_\gamma\}$ — база Хамеля многообразия $\varepsilon(M)$; $\{\theta_\alpha\}$, $\{d_\beta\}$, $\{c_\gamma\}$ — множества вещественных чисел, в каждом из которых лишь конечное число отлично от нуля, причем

$$\theta_\alpha\geqslant 0,\ \sum\theta_\alpha=1,\ d_\beta\geqslant 0.$$

Эта теорема является обобщением результата, ранее полученного автором для конечномерных пространств (РЖМат, 1955, 1660).

Пусть E^* — линейное множество аддитивных однородных функционалов, определенных на E, $\{f_\alpha\}\subset E^*$, $\{a_\alpha\}$ — множество вещественных чисел. Теорема 2 содержит необходимое и достаточное условие совместности системы неравенств $f_\alpha(x)\leqslant a_\alpha$ (где α пробегает некоторое множество A индексов), теорема 3 дает геометрическое истолкование величины

$$\mathscr{L}=\inf_{x\in E}\sup_{\alpha\in A}(f_\alpha(x)-a_\alpha).$$

Выпуклое замкнутое множество $M\subset E$ называется многогранником относительно E^*, если для любых элементов $y\in E$, $x\in M$, удовлетворяющих условиям $0<\lambda<\infty$, $z=x+\lambda(y-x)\notin M$, найдется такой элемент $f\in E^*$, что $f(z)<f(u)$ для всех z указанного вида и $u\in M$. Устанавливается (теорема 4) необходимое и достаточное условие того, чтобы выпуклое замкнутое множество M было многогранником относительно E^*.

Приводится (теорема 6) следующее обобщение теоремы Хара о наилучших приближениях непрерывных функций обобщенными полиномами. Пусть C — пространство вещественных непрерывных функций на компакте Q и $L\subset C$ — n-мерное подпространство. Для каждого $x\in C$ совокупность функций $l\in L$, на которых достигается расстояние

$$\rho(x;\ L)=\min_{l\in L}\max_{t\in Q}|x(t)-l(t)|,$$

образует многогранник, который тогда и только тогда является не более чем k-мерным, когда каждые $k+1$ линейно независимых функций из L имеют не более $n-k-1$ общих корней. М. А. Рутман

6470. **О спектре симметризуемых эндоморфизмов в локально выпуклых пространствах, в частности в пространствах типа** (ω). **Ландсберг** (Über das Spektrum symmetrisierbarer Endomorphismen in lokalkonvexen Räumen, insbesondere in Räumen vom Typ (ω). Landsberg Max), Math. Z., 1956, 66, № 1, 58—63 (нем.)

Непрерывный эндоморфизм A локально выпуклого топологического (хаусдорфова) пространства E (с элементами x, y, ...) называется симметризуемым эндоморфизмом 1-го рода, если существует отображение Θ сопряженного пространства E' (с элементами u, v, ...) на E, обладающее следующими свойствами: $\Theta(u+v)=\Theta(u)+\Theta(v)$, $\Theta(au)=\bar{a}\Theta(u)$ (a — комплексное число), $\langle\Theta u,\ u\rangle\neq 0$ ни при каком $u\neq 0$ ($\langle x,\ u\rangle$ есть значение линейного функционала u на элементе x), $\langle\Theta u,\ v\rangle=\overline{\langle\Theta v,\ u\rangle}$ при всех u, $v\in E'$ и, наконец, $\langle A\Theta u,\ v\rangle=\langle A\Theta v,\ u\rangle$ при всех u, $v\in E'$. Эндоморфизм A называется симметризуемым 2-го рода, если сопряженный оператор A' в E' (со слабой топологией) является симметризуемым 1-го рода. Пространство называется симметризуемым 1-го или 2-го рода, если его тождественное преобразование является симметризуемым эндоморфизмом соответственно 1-го или 2-го рода.

Типичные результаты: 1. Если пространство E и оператор A являются симметризуемыми 1-го рода, то каждое собственное значение оператора A' действительно и является собственным значением A. (Определения таковы, что из симметризуемости оператора A вытекает симметризуемость пространства E. *Реф.*).

2. Если пространство локально выпукло и слабо полно (пространство типа (ω)), то оператор A не имеет непрерывного спектра. М. К. Фаге

6471. **О слабой сходимости в локально равномерно выпуклых пространствах. Выборный** (O slabé konvergenci v prostorech lokálně stejnoměrně konvexních. Výborný Rudolf), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 3, 352—353 (чеш.)

Обобщается на случай локально равномерно выпуклых пространств (РЖМат, 1956, 5969) теорема, доказанная В. Л. Шмульяном (Докл. АН СССР, 1939, 34, 647—651) для равномерно выпуклых пространств: если последовательность x_n слабо сходится к x и $\|x_n\|\to\|x\|$, то $\|x_n-x\|\to 0$. М. И. Кадец

6472. **О неархимедовски нормированных пространствах. I. Монна** (Sur les espaces normés non-archimédiens. I. Monna A. F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 4, 475—483; Indagationes math., 1956, 18, № 4, 475—483 (франц.)

Рассматривается неархимедовски нормированное пространство E над неархимедовски (но не обязательно дискретно) нормированным полем K (определения см. РЖМат, 1956, 592). Пространство E называется полным в сферическом смысле (сокращенно, сф. полным), если всякое множество шаров в E, вполне упорядоченное по отношению к операции включения, имеет непустое пересечение. Всякое сф. полное пространство E является полным (теорема 1).

Если V — сф. полное линейное замкнутое подпространство пространства E, то расстояние d_0 любого

элемента $x_0 \in E$ от V достигается на некотором элементе $\xi_{x_0} \in V$.

Если для некоторого замкнутого линейного подпространства $V \subset E$ по вектору $x \in E$ однозначно определяется соответствующий вектор $\xi_x = Px$, то оператор P называется проектором из E на V. Оператор P линеен и непрерывен. Доказывается, что $\|P\| = 1$ и $P^2 = P$ и что эти условия являются характеристическими для проекторов.

Если V — линейное замкнутое сф. полное подпространство пространства E, то существует проектор из E на V (теорема 7).

Элемент x называется ортогональным к замкнутому линейному подпространству $V \subset E$, если $\|x\|$ есть кратчайшее расстояние от x до V. Подпространство W называется ортогональным к подпространству V, если каждый элемент из W ортогонален к V. Подпространство V^* называется ортогональным дополнением к V, если V^* ортогонально к V и $V + V = E^*$.

Устанавливаются естественные связи между операциями проектирования и ортогональными дополнениями. В частности, выясняется, что соотношения ортогональности взаимны.

Если $E = V_1 + V_2$ и для всякого $x \in E$ ($x = x_1 + x_2$; $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$) имеет место равенство

$$\|x\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|),$$

то V_1 и V_2 суть взаимно ортогональные дополнительные подпространства (теорема 13). И. С. Иохвидов

6473. О неархимедовски нормированных пространствах. II. Монна (Sur les espaces normés non-archimédiens. II. Monna A. F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 4, 484—489; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 484—489 (франц.)

Продолжение предыдущей статьи (реф. 6472). Рассматриваются сепарабельные пространства E (§ 2). В этом случае существует конечная или счетная система попарно ортогональных векторов $y_1, y_2, \ldots \in E$, по которой всякий вектор $x \in E$ допускает единственное разложение $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ ($a_i \in K$) (сильно сходящееся), причем $\|x\| = \max_i \|a_i y_i\|$ (теорема 14).

Через K_0^∞ обозначается пространство последовательностей $x \equiv (x_1, x_2, \ldots)$ ($x_i \in K$) с условием $\lim x_i = 0$ и нормой $\|x\| = \max_i |x_i|$.

Аналогично определяется пространство K^n конечных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть E — линейное полное сепарабельное пространство над сф. полным полем K. Тогда если E конечномерно, то оно изоморфно K^n, а если бесконечномерно, то изоморфно K_0^∞ (теорема 15).

В последнем параграфе рассматриваются сф. полные пространства. Оказывается, что всякое полное дискретное поле является сф. полным. Если K — сф. полное поле, то пространство K^n сф. полно (теорема 17). Отсюда и из теоремы 15 получается, что всякое сепарабельное конечномерное линейное пространство E над сф. полным полем K является сф. полным (теорема 18).

Приводятся примеры полных и сф. полных пространств, у которых существуют подпространства, не являющиеся сф. полными. И. С. Иохвидов

6474. Проблема базиса для пространств функций со значениями в векторном пространстве. Эллис (On the basis problem for vector valued function spaces. Ellis H. W.), Canad. J. Math., 1956, **8**, № 3, 417—422 (англ.)

Функция длины λ и соответствующие ей пространства L^λ, $L^\lambda(B)$ вводятся по статье Эллиса и Гальперина (РЖМат, 1954, 4489). Базис $\{x_i\}$ в B называется K-регулярным, если выполняется условие $\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant K\|x\|$ для каждого $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in B$ ($1 \leqslant K < \infty$).

Доказывается теорема: Если L^λ имеет K-регулярный базис Хара (либо σ-базис Хара) $\{\varphi_i(P)\}$ и если в пространстве B имеется K'-регулярный базис $\{x_j\}$ то функции $\varphi_i(P)\,x_j$ образуют $3KK'$-регулярный базис в $L^\lambda(B)$.

Нумерация элементов $\varphi_i(P)\,x_j$ такова:

$$\varphi_1(P)\,x_1;\ \{\varphi_i(P)\,x_n\}_{1 \leqslant i \leqslant n-1},$$

$$\{\varphi_n(P)\,x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n},\quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Существование базиса (σ-базиса) Хара в L^λ рассмотрено в статье Эллиса и Гальперина (РЖМат 1957, 610). Д. П. Мильман

6475. Об ортогональном базисе в пространстве Банаха. Соломяк М. З., Вестн. Ленингр. ун-та 1957, № 1, 27—36, 208 (рез. англ.)

Полная последовательность $\{z_k\}$ в пространстве Банаха E называется ортогональным базисом в E, если она может быть охарактеризована условием: для каждого n имеется линейный оператор P_n с нормой равной единице, проектирующий E на линейную оболочку векторов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и удовлетворяющий условию $P_n(z_m) = 0$ при $m > n$.

Доказывается, что базис Хара является ортогональным в L^p ($p \geqslant 1$) и в сепарабельных пространствах Орлича. Этот результат доказывается путем специализации критерия базиса Гринблюма (Докл. АН СССР 1941, **31**, 428—432) для ортогональных базисов. При этом используется устанавливаемая автором геометрическая характеристика пространств PE, где P — проектирующий оператор в E с нормой, равной единице. Дается пример сепарабельного пространства E, не обладающего ортогональным базисом. Д. П. Мильман

6476. О норме линейного функционала в пространстве Орлича и об одной внутренней характеристике пространства L_p. Салехов Д. В., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 5, 948—950

Пусть $M(u)$ и $N(u)$ — взаимно дополнительные по Юнгу N'-функции, L_M^* — пространство Орлича функций, определенных на множестве G конечномерного евклидова пространства. Пусть, далее, $l(u)$ — линейный функционал, определенный на L_M^* и допускающий интегральное представление $l(u) = \int_G u(x)\,v(x)\,dx$, где $v(x) \in L_N^*$.

Известно, что норма $\|l\|$ функционала $l(u)$ связана с нормой $\|v\|_N$ функции $v(x)$ неравенствами $\|l\| \leqslant \|v\|_N \leqslant 2\|l\|$. В работе изучается функционал $k(v) = \|v\|_N / \|l\|$. Приведем основные результаты.

1. Существуют пространства Орлича L_M^*, для которых значения функционала $k(v)$ полностью заполняют интервал (1, 2).

2. Пусть $M(u)$ и $N(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию (т. е. $M(2u) \leqslant kM(u)$, $N(2u) \leqslant kN(u)$, где k — постоянная) при всех u, если $\operatorname{mes} G = \infty$, или при достаточно больших u, если $\operatorname{mes} G < \infty$. Тогда $k(v) \geqslant 1 + \alpha > 1$, где α — положительная постоянная, определенная функциями $M(u)$ и $N(u)$.

3. Пусть $k(v) = \text{const}$. Тогда $M(u) = c|u|^p$ ($p > 1$) при всех u, если $\operatorname{mes} G = \infty$, и при достаточно больших u, если $\operatorname{mes} G < \infty$.

Таким образом, постоянство функционала $k(v)$ является характеристическим свойством пространства L_p в классе пространств Орлича. Я. Б. Рутицкий

6477. Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве. Кадец М. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 185—190

Пусть E — равномерно выпуклое линейное нормированное пространство. Через $\varepsilon(\delta)$ обозначим точную верхнюю грань диаметров множеств, отсекаемых от единичной сферы пространства E гиперплоскостями, отстоящими от центра на расстоянии $1-\delta$. Обратную функцию $\delta(\varepsilon)$ автор называет модулем выпуклости пространства E.

Доказывается теорема: Если $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ есть безусловно (коммутативно) сходящийся ряд в E, то $\sum_{k=1}^{\infty} \delta(\|x_k\|) < \infty$.

Известно, что пространства $L_p\,(p>1)$ равномерно выпуклы. Для них автор доказывает неравенства: $\delta(\varepsilon) > K(p)\,\varepsilon^p$ при $p \geqslant 2$, $\delta(\varepsilon) > K(p)\,\varepsilon^2$ при $1 < p < 2$, где $K(p)$ — зависящее только от p положительное число. Эти оценки для $\delta(\varepsilon)$ показывают, что теорема автора является обобщением следующего необходимого признака безусловной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в L_p, данного Орличем: $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty$ при $p \geqslant 2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$ при $1 < p < 2$. Д. П. Мильман

6478. О спектре сцепленных операторов. Халберг, Тейлор (On the spectra of linked operators. Halberg Charles J. A., Jr, Taylor Angus E.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 2, 283—290 (англ.)

Пусть X, Y, $Z\,(\neq\{0\})$ — комплексные линейные векторные пространства, причем $Z \subset X \cap Y$ и X, Y, Z становятся банаховыми пространствами соответственно X_1, Y_2, Z_N по введении норм $n_1(x)$, $n_2(y)$, $N(z) = \max\{n_1(z), n_2(z)\}$. Линейные (т. е. дистрибутивные и ограниченные) операторы T_1 в X_1 и T_2 в Y_2 называются сцепленными, если $T_1 z = T_2 z$ для всех $z \in Z$; они называются сцепленными плотно (densely) относительно X_1, если, кроме того, Z всюду плотно в X_1.

Обозначая через $\rho(T_1)$, $\rho(T_2)$ резольвентные множества соответствующих операторов, через $\sigma(T_1)$, $\sigma(T_2)$ — их спектры, автор доказывает следующую теорему: Если T_1 и T_2 сцеплены плотно относительно X_1 и $(\lambda I - T_1)^{-1} z = (\lambda I - T_2)^{-1} z$ для всех $z \in Z$, $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$, то пересечение любой связной компоненты спектра $\sigma(T_1)$ со спектром $\sigma(T_2)$ не пусто.

Примерами осуществления требуемых условий и применения указанной теоремы являются пространства $X_1 = l_r$ и $Y_2 = l_s$ (где $r, s \geqslant 1$), в которых операторы T_1 и T_2 определены одной и той же матрицей (t_{ij}).

М. К. Фаге

6479. К спектральной теории вполне непрерывных и некоторых других замкнутых операторов. Танабэ (On spectral theory of completely continuous and some other closed operators. Tanabe Hiroki), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1956, 6, № 1, 13—21 (англ.)

Пусть T — дистрибутивный замкнутый оператор, определенный на множестве, всюду плотном в комплексном банаховом пространстве X; $*$ обозначает сопряженный оператор или сопряженное пространство (линейных функционалов). Основной результат статьи содержит условия сохранения третьей теоремы Фредгольма: Пусть σ — ограниченное спектральное множество для оператора T, т. е. множество одновременно открытое и замкнутое относительно спектра $\sigma(T)$ оператора T; если для некоторого целого $n > 0$ и некоторого комплексного числа $\lambda \in \sigma$ множество значений оператора $(\lambda I - T)^n$ замкнуто, то уравнение

$$y = (\lambda I - T)^n x \qquad (1)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда $f(y) = 0$ для всех функционалов f, удовлетворяющих уравнению

$$(\bar{\lambda} I^* - T^*)^n f = 0.$$

Имеется аналогичный результат с переменой ролей X и X^*, T и T^*.

Другие результаты относятся к задаче выделения из оператора T обобщенной нульстепенной компоненты; например: пусть λ — изолированная спектральная точка оператора T, E_λ — соответствующий идемпотентный оператор (равный вычету резольвенты в точке λ); тогда многообразие $E_\lambda X$ совпадает с множеством тех элементов x, для которых $\lim \|(\lambda I - T)^n x\|^{1/n} = 0$.

Примечание референта. Условие замкнутости множества $(\lambda I - T)^n X$ как достаточное для нормальной разрешимости уравнения (1) (термин Хаусдорфа — эквивалент справедливости третьей теоремы Фредгольма) лежит в круге идей Хаусдорфа (Теория множеств, М. — Л., 1937, 266—290), использованных далее в статье С. М. Никольского (Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, 7, 147—166) для полного решения вопроса о границах применимости теории Фредгольма—Рисса—Шаудера. Однако автор не упоминает этих работ, цитируя только американских математиков, работающих в области спектральной теории несамосопряженных операторов: Данфорда (РЖМат, 1955, 5132), Шварца (РЖМат, 1955, 5137) и др.

М. К. Фаге

6480. Собственные значения несимметрических операторов. Тауц (Eigenwerte bei nichtsymmetrischen Operatoren. Tautz G. L.), Arch. Math., 1956, 7, № 4, 310—316 (нем.)

Рассматриваются линейные непрерывные отображения $K\varphi$ ($\varphi \in \mathfrak{B}$) комплексного или вещественного банахова пространства $\mathfrak{B}$ в себя. Операторы K сами образуют банахово пространство $\mathfrak{T}$ с нормой $\|K\| = \max_{\|\varphi\|=1} \|K\varphi\|$.

Теорема 3. Если оператор K_0 принадлежит компактному множеству $\mathfrak{K}$ вполне непрерывных операторов из $\mathfrak{T}$, и λ_0 — собственное значение оператора K_0, то для любого $\varepsilon > 0$ каждый оператор из $\mathfrak{K}$, попадающий в достаточно малую окрестность точки K_0 в $\mathfrak{T}$, имеет собственное значение в ε-окрестности числа λ_0.

Эта теорема применяется к вещественным интегральным операторам с квадратично интегрируемыми ядрами.

Теорема 4. Пусть ядро K_0 принадлежит компактному множеству $\mathfrak{K}$ и $\lambda_0 \neq 0$ является простым вещественным собственным значением K_0, тогда всякое ядро из $\mathfrak{K}$, попадающее в достаточно малую окрестность точки K_0, также имеет действительное собственное значение, лежащее в произвольной наперед заданной окрестности числа λ_0.

В связи с этим отмечается ошибка, допущенная автором в предыдущей работе при формулировке этой теоремы (РЖМат, 1955, 5069, теорема 2), где было пропущено условие простоты собственного значения, и приводится контрпример. И. С. Иохвидов

6481. О некоторых групповых алгебрах. Уилкокс (Note on certain group algebras. Willcox Alfred B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 874—879 (англ.)

В множестве $S(R)$ двусторонних максимальных регулярных идеалов банаховой алгебры R можно задать топологию, определив замыкание подмножества

$F \subseteq S(R)$ как совокупность всех идеалов $I \in S(R)$, содержащих пересечение $\bigcap_{I \in F} I$ (ядро подмножества F). Если при этом $S(R)$ оказывается хаусдорфовым пространством и каждый элемент пространства $S(R)$ содержится в открытом подмножестве, замыкание которого имеет регулярное ядро, то R называется GS-алгеброй.

Пусть R_1 и R_2 — банаховы алгебры, а $R_1 \times R_2$ — кронекеровское произведение этих алгебр. Определим норму элемента $y_1 \times y_2 \in R_1 \times R_2$ ($y_1 \in R_1$; $y_2 \in R_2$), положив

$$\| y_1 \times y_2 \| = \| y_1 \|_1 \| y_2 \|_2. \qquad (1)$$

Если норма (1) удовлетворяет всем свойствам нормы, кроме свойства полноты, то пополнение $R_1 \otimes R_2$ пространства $R_1 \times R_2$ по этой норме называется скрещенной алгеброй алгебр R_1 и R_2.

В работе показано, что групповая алгебра $L^1(G_1 \times G_2)$ прямого произведения локально бикомпактных групп G_1 и G_2 является скрещенным произведением групповых алгебр сомножителей. Если одна из групп G_1 и G_2 бикомпактна, а другая абелева, то алгебра $L^1(G_1 \times G_2)$ будет GS-алгеброй. С. Д. Берман

6482. Метрический признак самосопряженных операторов. Видав (Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren. Vidav Ivan), Math. Z., 1956, **66**, № 2, 121—128 (нем.)

Если в банаховой алгебре $\mathfrak{B}$ определена инволюция $X \to X^*$, удовлетворяющая условиям: 1) $X^{**} = X$, 2) $(\lambda X + \mu Y)^* = \bar{\lambda} X^* + \bar{\mu} Y^*$, 3) $(XY)^* = Y^* X^*$, 4) $\| X^* X \| = \| X \|^2$, 5) существует элемент $(1 + X^* X)^{-1}$, то, как известно, $\mathfrak{B}$ $*$-изоморфна и изометрична подкольцу кольца всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве (Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Матем. сб., 1943, **12**, 197—213). В связи с этим ставится задача — охарактеризовать алгебры этого типа подмножествами элементов, аналогичных самосопряженным операторам.

Доказывается теорема: Пусть в некоторой банаховой алгебре $\mathfrak{B}$ с единицей 1 имеется подмножество H, удовлетворяющее следующим условиям:

A. Каждый элемент $x \in \mathfrak{B}$ можно хотя бы одним способом представить в виде $h + ig$, где h, $g \in H$, а $i^2 = 1$.

B. Если $h \in H$ и ξ — действительное число, то $\| 1 + i\xi h \| \leqslant 1 + o(\xi)$ при $\xi \to 0$.

C. Для каждого $h \in H$ существует разложение $h^2 = u + iv$, где u, $v \in H$ и $uv = vu$.

Тогда $\mathfrak{B}$ обладает следующими свойствами: 1. Разложение в условии A единственно. 2. Соответствие $x = h + ig \to h - ig = x^*$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3), 5) (см. выше), а функционал $\| x^* x \|^{1/2}$ определяет норму, эквивалентную прежней и совпадающую с ней на элементах $x = h \in H$ (равенство в условии 4). М. К. Фаге

6483. Точечный спектр слабо почти периодических функций. Эберлейн (The point spectrum of weakly almost periodic functions. Eberlein W. F.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 137—139 (англ.)

Изучается спектр (по Бёрлингу) слабо почти периодических (п. п.) функций на абелевой группе G (определение слабых п. п. функций на группе см. в работе автора: Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 217—240).

Доказываются следующие теоремы:

1. Каждая слабая п. п. функция x допускает единственное разложение $x = x_1 + x_2$, где x_1 — равномерная п. п. функция и $M(|x_2|^2) = 0$.

2. Пусть $x \in L^\infty(G)$. Спектром $\sigma(x)$ функции x называется совокупность всех характеров λ, содержащихся в слабом замыкании сдвигов функции x. Пусть x — слабая п. п. функция и $\sigma_p(x) \subset \sigma(x)$ состоит из всех характеров, содержащихся в равномерном замыкании сдвигов функции x. Тогда $\lambda \in \sigma_p(x)$ в том и только в том случае, если $M_s\{x(s)(-s, \lambda)\} \neq 0$.

Б. М. Левитан

6484. О вращениях в гильбертовом пространстве. Патнам (On rotations in Hilbert space. Putnam C. R.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 23, 188—192 (англ.)

Пусть Ω — множество всех бесконечных вещественных унитарных матриц A, метризованное с помощью равенства $\rho(A_1, A_2) = \| A_1 - A_2 \|$, где левая часть означает расстояние между двумя точками в Ω, а правая часть есть норма оператора, определяемого разностью матриц в гильбертовом пространстве H. Через Ω_0 обозначим множество всех тех матриц A из Ω, которые допускают представление $A = \exp S$, где $S = S_A$ есть вещественная ограниченная кососимметрическая матрица.

Точка $A \in \Omega$ называется «вращением» или «отражением», смотря по тому, принадлежит ли она к Ω_0 или к $\Omega - \Omega_0$.

Статья посвящена доказательству локальной связности множества Ω_0 в следующем смысле: для каждой точки $A \in \Omega_0$ и любой окрестности U_ε этой точки в Ω существует такая окрестность U_δ точки A в Ω ($U_\delta \subset U_\varepsilon$), что любые два «вращения» из U_δ можно соединить непрерывным путем, лежащим в $U_\varepsilon \cap \Omega_0$. Доказательство существенно опирается на статью автора и Винтнера (Putnam C. R., Wintner A., Amer. J. Math., 1952, **74**, 52—78).

Отмечаются следующие нерешенные топологические вопросы: 1) Является ли множество $\Omega - \Omega_0$ «отражений», подобно множеству Ω_0, локально связным? 2) Являются ли множества Ω_0 и $\Omega - \Omega_0$ топологически эквивалентными? 3) Что соответствует в рассматриваемом бесконечномерном случае теореме о двусвязности множества «вращений» в конечномерном евклидовом пространстве (Вейль Г., Классические группы и их представления, М., 1947, стр. 361)?

И. М. Глазман

6485. О факторизации матриц. Винер (On the factorization of matrices. Wiener Norbert), Comment. math. helv., 1955, **29**, № 2, 97—111 (англ.)

Целью статьи является доказательство для случая $n = 2$ следующего предложения: Пусть $H(\theta) = \| F_{jk}(\theta) \|_1^n$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ — эрмитова матрица-функция с элементами из $L(0, 2\pi)$, которой отвечает неотрицательная эрмитова форма, и $\Delta(\theta)$ — определитель этой матрицы. Условие

$$-\infty < \int_0^{2\pi} \ln \Delta(\theta)\, d\theta$$

необходимо и достаточно для того, чтобы матрица $H(\theta)$ допускала почти всюду представление $H(\theta) = M(\theta) M^*(\theta)$, где $M^*(\theta)$ — матрица-функция, комплексно-сопряженная и транспонированная к матрице $M(\theta) = \| \varphi_{jk}(\theta) \|_1^n$, все элементы которой принадлежат $L_2(0, 2\pi)$ и ортогональны к функциям $\exp(pi\theta)$ ($p = 1, 2, \ldots$), так что $\varphi_{jk}(\theta) \sim \sum_{p=0}^{\infty} c_{jk}^{(p)} e^{pi\theta}$ ($j, k = 1, 2, \ldots, n$).

Для $n = 1$ это предложение было установлено Сего (1920 г.). В общем случае оно содержится в теореме 3 анонсированной в сообщении В. Засухина (Докл. АН СССР, 1941, **33**, № 7—8, 435—437), которое, по-видимому, осталось неизвестным автору.

Изложение в статье крайне неясное. Рассуждения последнего параграфа (§ 6) статьи представляются референту ошибочными. М. Г. Крейн

6486. **Субнормальные операторы. Брам** (Subnormal operators. Bram Joseph), Duke Math. J., 1955, 22, № 1, 75—94 (англ.)

Действующий в гильбертовом пространстве H ограниченный линейный оператор A с областью определения $D_A = H$ называется субнормальным, если существует в некотором гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supset H$ ограниченный нормальный оператор $\tilde{A}$, совпадающий на H с A. Оператор $\tilde{A}$ называется нормальным расширением субнормального оператора A. Нормальное расширение $\tilde{A}$ оператора A называется минимальным, если наименьшее подпространство, приводящее $\tilde{A}$, совпадает с $\tilde{H}$. Согласно теореме Халмоша (Halmos P. R., Summa brasiliensis math., 1950, 2, № 9, 125—134), все минимальные нормальные расширения данного субнормального оператора унитарно эквивалентны.

В § 1 реферируемой статьи изучается внутренняя характеристика субнормальных операторов, не требующая выхода из данного пространства H. Как установил Халмош (см. выше), для субнормальности оператора A необходимо и достаточно выполнение для любой конечной последовательности элементов $f_0, f_1, \ldots, f_r$ из H условий

$$\sum_{m,\,n=0}^{r} (A^n f_m,\ A^m f_n) \geqslant 0, \qquad (1)$$

$$\sum_{m,\,n=0}^{r} (A^{n+1} f_m,\ A^{m+1} f_n) \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{m,\,n=0}^{r} (A^n f_m,\ A^m f_n). \qquad (2)$$

Автор устанавливает, что из условия (1) следует условие (2) (причем $c = \|A\|^2$), так что субнормальные операторы вполне характеризуются одним условием (1).

Далее устанавливается, что для субнормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы при любом комплексном z оператор $\exp(-\bar{z}A^*)\exp(zA)$ был положительным.

В § 2 исследуется связь между спектром субнормального оператора A и спектром его минимального нормального расширения $\tilde{A}$. Обозначим через $\Lambda(T)$ спектр ограниченного оператора T, через $\Pi(T)$ — его дополнение (т. е. поле регулярности оператора T). Очевидно, что $\Pi(T) = \sum_k U_k(T) + U_\infty(T)$, где сумма распространяется на все конечные связные компоненты U_k поля $\Pi(T)$, а U_∞ есть связная компонента поля $\Pi(T)$, содержащая бесконечно удаленную точку. Устанавливается включение $\Lambda(A) \subset \Lambda(\tilde{A}) + \sum_k U_k(\tilde{T})$, что в сочетании с результатом Халмоша (Halmos P. R., Ann. Soc. polon. math., 1952, 25, 43—49) дает включения

$$\Lambda(\tilde{A}) \subset \Lambda(A) \subset \Lambda(\tilde{A}) + \sum_k U_k(\tilde{A}).$$

Рассматриваются циклические субнормальные операторы.

В заключительном § 3 доказана теорема: Для того чтобы действующий в H ограниченный линейный оператор T с областью определения $D_T = H$ допускал расширение $\tilde{T}$ в $\tilde{H}(\tilde{H} \supset H)$, коммутирующее с минимальным нормальным расширением $\tilde{A}$ субнормального оператора A в H, необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1) оператор T коммутирует с A, 2) существует такая константа $c > 0$, что для любой последовательности элементов $f_0, f_1, \ldots, f_r$ из H имеет место неравенство

$$\sum_{m,\,n=0}^{r} (A^m T f_n,\ A^n T f_m) \leqslant c \sum_{m,\,n=0}^{r} (A^m f_n,\ A^n f_m).$$

Если указанное расширение оператора T существует, то оно единственно.

Остальные результаты § 3 относятся к кольцам, связанным с субнормальными операторами. И. М. Глазман

6487. **Спектральный анализ несамосопряженных операторов. Наймарк М. А.,** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 183—202

Обзорный доклад на Всесоюзном совещании по функциональному анализу и его применениям (Москва, январь 1956 г.). М. К. Фаге

6488. **Спектральная теория для одного класса ненормальных операторов. Гоншор** (Spectral theory for a class of non-normal operators. Gonshor Harry), Canad. J. Math., 1956, 8, № 4, 449—461 (англ.)

Обобщая понятие нормального оператора, автор вводит понятие J_n-оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Так назван оператор A, для которого H допускает прямое разложение по некоторому параметру t, причем в соответствующем слагаемом $H(t)$ оператор A, обозначенный через $A(t)$, представим в матричной форме типа

$$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & D & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & D & \ldots \end{pmatrix},$$

где

$$D \equiv D(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \ldots \\ \cdot \quad \ldots \\ \cdot \quad \ldots \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица порядка не выше n с измеримыми и ограниченными по мере элементами, причем показано, что, не ограничивая общности, ее можно считать матрицей порядка именно n. Автор проводит последующие построения при $n = 2$, но утверждает, что они осуществимы при любом n.

Основной результат: Если A есть J_2-оператор, то A может быть разложен так, что $A(t)$ есть при каждом t или скалярная матрица $\begin{pmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & \lambda(t) \end{pmatrix}$, или матрица вида $\begin{pmatrix} \lambda(t) & a(t) \\ 0 & \mu(t) \end{pmatrix}$, где все три функции измеримы, ограничены по мере и, кроме того, $a(t) > 0$, а $\lambda(t)$, $\mu(t)$ комплекснозначны, но удовлетворяют неравенству $\lambda(t) \geqslant \mu(t)$ в следующем смысле «лексикографического» упорядочения комплексных чисел по модулю и аргументу: либо $|\lambda(t)| > |\mu(t)|$, либо $|\lambda(t)| = |\mu(t)|$, но $\arg\lambda(t) \geqslant \arg\mu(t)$.

Для доказательства используется теория факторов Меррея—Неймана (Наймарк М. А., Нормированные кольца, М., Гостехиздат, 1956).

Объединяя подпространства $H(t)$ соответственно значениям $A(t)$, автор получает спектральное семейство проекторов $E(B)$, определенное по крайней мере для борелевских множеств в пространстве $Z \cup Q$, являющемся «суммой» комплексной плоскости Z и пространства троек (λ, μ, a), причем числа $|\lambda|$, $|\mu|$, a не превосходят нормы $\|A\|$ оператора A. Этот результат истолковывается как «спектральная теорема».

Теорема о классах унитарной эквивалентности J_2-операторов аналогична соответствующей теореме для

нормальных (самосопряженных) операторов (Плеснер А. И., Рохлин В. А., Успехи матем. наук, 1946, 1, № 1, 71—191): каждый класс характеризуется некоторой функцией $\nu(B)$ с целыми значениями вплоть до $\aleph_0$.

Указывается (без доказательства, со ссылкой на диссертацию автора: Harvard Univ., June 1953), что J_2-оператор есть не что иное, как бинормальный оператор в смысле Броуна (РЖМат, 1956, 6699).

М. К. Фаге

6489. **Унитарная эквивалентность факторов типа III. Мисоноу** (Unitary equivalence of factors of type III. Misonou Yosinao), Proc. Japan Acad., 1953, 29, 482—485 (англ.)

Статья посвящена доказательству следующей теоремы, касающейся факторов типа III в смысле Меррея и Неймана (Murray F. J., Neumann J. von, Ann. Math., 1943, 44, 716—808): Если два таких фактора в сепарабельных гильбертовых пространствах $*$-изоформны, то между этими двумя гильбертовыми пространствами существует линейная изометрия, индуцирующая данный изоморфизм. Автор отмечает, что это — специальный случай теоремы, сформулированной референтом (Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, 480).

E. L. Griffin, Jr

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 3, 264.

6490. **Представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве. Березин Ф. А.,** Докл. АН СССР, 1956, 110, № 6, 897—900

Перечисляются все, с точностью до эквивалентности, неприводимые представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве.

Пусть $\mathfrak{G}$ — комплексная полупростая группа Ли, $\mathfrak{U}$ — ее максимальная компактная подгруппа, c — неприводимое представление группы $\mathfrak{U}$ и $\chi_c(u)$ — характер этого представления, умноженный на его размерность. Финитные функции на $\mathfrak{G}$, для которых

$$x(g) = \int x(gu)\,\overline{\chi_c(u)}\,d\mu(u) = \int x(ug)\,\overline{\chi_c(u)}\,d\mu(u),$$

образуют подкольцо L_c группового кольца группы $\mathfrak{G}$ (Годман). Если T_g — неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$ в банаховом пространстве B и T_u — индуцированное представление подгруппы $\mathfrak{U}$, то $P = \int T_u\,\overline{\chi_c(u)}\,d\mu(u)$ есть оператор, проектирующий B на такое подпространство B_c, что: 1) B_c инвариантно относительно T_u, 2) представление группы $\mathfrak{U}$, индуцированное представлением T_u в B_c, кратно c; 3) B_c является максимальным подпространством в B, удовлетворяющим условиям 1) и 2). Как показано Годманом и Хариш-Чандра, пространство B_c конечномерно.

Каждому неприводимому представлению группы $\mathfrak{G}$ естественным образом отвечает конечномерное представление кольца L_c в пространстве B_c. Таким образом, каждому неприводимому представлению группы $\mathfrak{G}$ отвечает характер соответствующего конечномерного представления.

Основной результат: Два неприводимых представления комплексной полупростой группы в банаховых пространствах эквивалентны тогда и только тогда, когда равны соответствующие им характеры. Если неприводимые представления $T_g^{(1)}, \ldots, T_g^{(n)}$ не эквивалентны между собой, то соответствующие им характеры линейно независимы.

Далее указывается явная формула для характеров неприводимых представлений.

Вводятся так называемые элементарные представления полупростой группы; каждое из них распадается в прямую сумму неприводимых частей, которыми с точностью до эквивалентности и исчерпываются все неприводимые представления данной полупростой группы.

Полученные автором формулы, описывающие неприводимые представления полупростых групп в банаховых пространствах, аналогичны формулам, найденным И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 36) для унитарных представлений.

С. В. Фомин

6491. **Проблема возмущения собственных значений нелинейных операторов. Блок, Розенблум** (Perturbations of non-linear eigenvalue problems. Block H. D., Rosenbloom P. C.), Arch. Math., 1956, 7, № 3, 172—183 (англ.)

Пусть $T_0 x_0 = \lambda_0 x_0$, $x_0^* x_0 = 1$, где T_0 — нелинейный оператор, преобразующий банахово пространство X в себя, x_0 — некоторый элемент из X, а x_0^* — линейный функционал из X^*. Рассматривается система уравнений

$$[T_0 + U(\eta)]\,x = (\lambda_0 + \eta)\,x,\ x_0^* x = 1, \qquad (1)$$

где $U(\eta)$ — малый возмущенный оператор, нелинейно зависящий от параметра η. Указаны условия, при которых система (1) имеет единственное решение $\{\tilde{x}, \tilde{\eta}\}$ в окрестности точки $\{x_0, 0\}$.

Основная идея работы состоит в таком преобразовании рассматриваемых уравнений, при котором становится возможным применение общих теорем функционального анализа о существовании решения и сходимости последовательных приближений.

Рассмотрены два таких преобразования, приводящие соответственно к применению принципа сжатых отображений и метода Ньютона. Приведен пример.

Примечание референта. Рассуждения, близкие к приведенным авторами, были применены М. А. Красносельским в теории возмущения линейных операторов (Докл. АН УССР, 1952, № 3).

Л. А. Гуревич

6492. **О линейных дифференциальных уравнениях в банаховых пространствах. Като** (On linear differential equations in Banach spaces. Kato Tosio), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 479—486 (англ.)

В банаховом пространстве X рассматривается уравнение

$$du(t)/dt = A(t)\,u(t) + f(t) \quad (a < t < b);$$

$$u(a) = u_0 \qquad (1)$$

(функция $u(t)$ строго непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, производная понимается в сильном смысле). Требуется, чтобы существовал ограниченный ограниченно обратимый линейный оператор $Q(t)$, для которого существует строго непрерывная слабая производная, а оператор $\overline{A}(t) = QAQ^{-1}$ замкнут, имеет плотную в X область определения и удовлетворяет для каждого $\lambda > 0$ неравенству $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}$. Тогда решение уравнения (1) единственно; более того, для решений соответствующего однородного уравнения имеет место неравенство $\|u(t)\| \leqslant c\|u_0\|$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, где c зависит только от $A(t)$. Для существования решения дополнительно предполагается существование ограниченного ограниченно обратимого оператора $R(t)$ со строго непрерывной второй слабой производной, для которого область определения оператора $\overline{\overline{A}}(t) = RAR^{-1}$ не зависит от t, а оператор $[I - \overline{\overline{A}}(t)]\,[I - \overline{\overline{A}}(a)]^{-1}$ строго непрерывно дифференцируем. При этих условиях существует ограниченный строго непрерывный по s, t оператор $U(t, s)$ $(a \leqslant s \leqslant t \leqslant b)$, для которого $U(t, t) = I$, $U(t, r) = U(t, s)\,U(s, r)$ $(r \leqslant s \leqslant t)$ и при $u_0 \in \mathfrak{D}[A(a)]$

функция $u(t) = U(t, a)u_0 + \int_a^t U(t, s)f(s)\,ds$ образует решение уравнения (1), если функция $f(t)$ строго непрерывно дифференцируема или если $f(t) \in \mathfrak{D}[A(t)]$, а $A(t)f(t)$ и $f(t)$ строго непрерывны по t. Доказательства только намечены; они связаны с доказательствами, проведенными в предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 2769). В качестве примера рассмотрена смешанная задача для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + q(x, t)u \quad (0 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$a \leqslant t \leqslant b), \quad u_x(0, t) - \alpha(t)u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) +$$

$$+ \beta(t)u(1, t) = 0 \quad (p, q, \alpha, \beta \text{ — вещественны}, \quad p > 0).$$

А. Д. Мышкис

6493. Операторные свойства полиномов наилучшего приближения. Никольский В. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 117—118

В пространстве E типа B рассматривается линейно независимая полная система элементов $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Полином $p_n = c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$ имеет, по определению, порядок n при $c_n \neq 0$. Для каждого $u \in E$ пусть определяются полиномы (полиномиальные операторы) $\pi_n(u)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, причем порядок полинома $\pi_n(u)$ не превосходит n, а $\pi_0(u) = \theta$. Положим $R_n(u) = u - \pi_n(u)$.

Теорема. Для того чтобы полиномиальные операторы $\pi_n(u)$ могли стать (для любых n и $u \in E$) полиномами наилучшего приближения в некоторой эквивалентной метрике, необходимо и достаточно, чтобы они обладали следующими свойствами:

1) $\pi_n(p_n) = p_n$, если p_n есть полином порядка не выше n;

2) $\pi_n(u + p_n) = \pi_n(u) + \pi_n(p_n)$;

3) $\pi_n(tu) = t\pi_n(u)$ (t — число);

4) каждый оператор $\pi_n(u)$ непрерывен в точке $u = \theta$;

5) существует такая метрика, эквивалентная исходной (норму элемента в этой метрике будем обозначать через $\|u\|_\sigma$), что

$$\|R_{k_1}R_{k_2}\ldots R_{k_m}(u + v)\|_\sigma \leqslant \|R_{k_1}R_{k_2}\ldots R_{k_m}(u) +$$

$$+ R_{k_1}R_{k_2}\ldots R_{k_m}(v)\|_\sigma$$

для любых $u, v \in E$ и любой конечной системы целых чисел $0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_m$;

6) $\lim_{k_m \to \infty} R_{k_1}R_{k_2}\ldots R_{k_m}(u) = \theta$ для всех $u \in E$.

В случае линейности полиномиальных операторов $\pi_n(u)$ необходимыми и достаточными являются лишь условия 1) и 6). В этом случае элементы $v_n = R_0R_1\ldots R_{n-1}(u)$ (полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля) образуют базис пространства E.

С. И. Зуховицкий

6494. О приближении абстрактных функций. Зуховицкий С. И., Стечкин С. Б., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 187—191

Доклад, прочитанный на Всесоюзной конференции по функциональному анализу в 1956 г. Без доказательства излагаются результаты, опубликованные авторами в ряде работ (РЖМат, 1956, 5339; 1957, 640, 641).

В. Н. Никольский

6495. Исследование быстроты сходимости метода наискорейшего спуска. Самокиш Б. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 238—240

Рассматривается многошаговый вариант метода наискорейшего спуска (Канторович Л. В., Успехи матем. наук, 1948, 3, № 6, 89—185; Бирман М. Ш., Успехи матем. наук, 1950, 5, № 3, 152—155) для уравнения $Ax = y$ в гильбертовом пространстве, где A — самосопряженный ограниченный оператор с положительной нижней гранью. Исследуется быстрота сходимости процесса в предположении, что M — изолированная точка спектра оператора A, а остальной спектр расположен в промежутке $[m, M_1]$ $(0 < m < M_1 < M < \infty)$. Доказательства не приводятся.

М. Ш. Бирман

6496. Структурная характеризация функциональных пространств. Пинскер А. Г., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 226—229

С помощью понятия симметричной структуры, введенного автором для чисто структурной характеристики K-пространств (РЖМат, 1955, 5160), дается решение аналогичной задачи для архимедовых K-линеалов. С этой целью над полной булевой алгеброй компонент симметричной структуры S строится K-линеал X счетнозначных ступенчатых элементов. Затем для некоторых пар элементов $a \in S$ и $x \in X$ вводятся соотношения порядка $x \leqslant a$ и $a \leqslant x$, с помощью которых формулируются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы заданная структура S была изоморфна некоторому архимедову K-линеалу с единицей. Как следствие из этой теоремы получается решение проблемы Биркгофа (Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952). Доказательства не приводятся.

Опечатка: в формулировке основной теоремы 3 K-линеал, изоморфный структуре S, следует обозначить вместо X другой буквой, чтобы избежать смешения с используемым вспомогательным K-линеалом X, составленным из ступенчатых элементов.

Б. З. Вулих

6497. К теории меры множеств, в смысле Лебега, в абстрактных пространствах. Албукерки (Une théorie de la mesure des ensembles, au sens de Lebesgue, dans les espaces abstraits. Albuquerque J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1955—1956, **A5**, № 1, 147—168 (франц.)

Рассматриваются внешние меры и такие меры μ в общих топологических пространствах, что для каждого множества X

$$\mu(X) = \mu(\overline{X}). \qquad (1)$$

Теоремы и определения, сформулированные в статье, в общем или хорошо известны, или тривиальны, или некорректны, или неверны. Например, в основном определении на стр. 159 функция f предполагается определенной только для замкнутых множеств, однако условия B) и C) требуют, чтобы f была определена также на конечных и счетных суммах замкнутых множеств, которые в общем случае не замкнуты. Теорема 18 сформулирована неверно. Замечание на стр. 166 о том, что мера Лебега удовлетворяет условию (1), неверно. Это непосредственно следует из теоремы (Marczewski E., Sikorski R., Colloq. math., 1949, 2, 13—19, theorem (v)) о том, что если σ-конечная борелевская мера μ в сепарабельном метрическом пространстве равна нулю на каждом одноточечном множестве, то из соотношения (1) следует, что $\mu \equiv 0$.

R. Sikorski

6498. Меры, инвариантные относительно не взаимно однозначных отображений. Рикард (Invariant measures for many-one transformations. Rechard Ottis W.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 3, 477—488 (англ.)

Пусть X — некоторое множество, m — мера в нем, определенная на σ-кольце $\mathfrak{X}$ измеримых множеств, и τ — отображение множества X в себя. Вопрос о существовании в X меры, эквивалентной m и инвариантной относительно τ, рассматривался рядом авторов. Один из последних результатов здесь принадлежит Котляру и Рикабарра (Cotlar M., Ricabarra R. A., Revista Union mat. Argentina, 1949, 14, 49—63), которые показали, что мера m^*, инвариантная относительно τ и эквивалентная m, существует в том и

только в том случае, когда функция множества $m[\tau^n(A)]$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, равномерно абсолютно непрерывны относительно m. Во всех этих иссследованиях отображение τ предполагалось взаимно однозначным.

В реферируемой работе рассматривается тот же вопрос для однозначных, но не взаимно однозначных отображений. Отображение τ называется несингулярным, если $m[\tau^{-1}(A)]=0$, как только $m(A)=0$. Но определению, мера m^* сильнее, чем m, если $m(A)=0$, как только $m^*(A)=0$. Если из $m^*(A)=0$ следует, что $\lim_n m[\tau^{-n}(A)]=0$, то мера m^* τ-асимптотически сильнее меры m.

Основной результат:

Теорема 2. Пусть τ — отображение (не обязательно взаимно однозначное) множества X в себя, измеримое и несингулярное. Для того чтобы существовала такая мера m^*, инвариантная относительно τ, которая одновременно слабее, чем m, и асимптотически сильнее, чем m, необходимо и достаточно, чтобы функции $m_n(E)=m[\tau^{-n}(E)]$, $E\subset X$, $n=1, 2, \ldots$ были равномерно абсолютно непрерывны относительно m.

Этот результат позволяет обобщить эргодическую теорему Данфорда и Миллера (Dunford N., Miller D. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, 60, 538—549), на не взаимно однозначные отображения. С. В. Фомин

6499. **Инвариантные меры в пространствах с транзитивной группой преобразований. Гёц, Хартман, Штейнхаус** (Miary niezmiennicze w przestrzeniach z przechodnią grupą transformacji. Goetz A., Hartman S., Steinhaus H.), Roczh. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 1, 2, № 1, 139—145 (польск.; рез. русск., англ.)

Если G — компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа, μ — мера Хара в G и m — инвариантная нормированная мера в G/H, то для произвольных борелевских множеств A, $B\subset G/H$ справедливо соотношение

$$\int_G m(A\cap\tau B)\,d\mu(\tau)=m(A)\,m(B).$$

Следовательно, если группа G связна, то существует такой элемент $\tau_0\in G$, что

$$m(A\cap\tau_0 B)=m(A)\,m(B). \qquad (1)$$

В частности если A, B — измеримые множества на сфере S с площадью $m(S)=1$, то существует такое вращение τ_0, что выполняется равенство (1).

Произведение $m(A)\,m(B)$ является единственной функцией чисел $m(A)$ и $m(B)$, для которой выполняется это равенство: если $f(x, y)$ — такая функция, определенная в квадрате $0\leqslant x, y\leqslant 1$, что для произвольных измеримых множеств A, $B\subset S$ существует вращение τ_0, при котором

$$m(A\cap\tau_0 B)=f(m(A),\ m(B)),$$

то $f(x, y)=xy$. R. Sikorski

6500. **Эргодическая теория и почти периодические функции на полугруппах. Якобс** (godentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Jacobs Konrad), Math. Z., 1956, 64, № 3, 298—338 (нем.).

Обобщается теория Мака почти периодических функций на полугруппе (Maak W., Acta math., 1952, 87, 33—57) на почти периодические векторы относительно полугруппы преобразований. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторое банахово пространство, $\mathfrak{G}$ — полугруппа (с единицей) линейных непрерывных операторов в $\mathfrak{H}$ с равномерно ограниченными нормами. Вектор $p\in\mathfrak{H}$ называется почти периодическим, если для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение полугруппы $\mathfrak{G}$ на конечное число непересекающихся множеств $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, обладающее следующим свойством: если для двух операторов $X, Y\in\mathfrak{G}$ найдутся два таких оператора $A, B\in\mathfrak{G}$, что $AXB\in\mathfrak{A}_\nu$, $AYB\in\mathfrak{A}_\nu$ при некотором ν, то $\|CXDp-CYDp\|<\varepsilon$ для любых $C, D\in\mathfrak{G}$. Устанавливается теорема об аппроксимации в норме пространства $\mathfrak{H}$ почти периодического вектора линейной комбинацией элементарных почти периодических векторов. Основное внимание удельно построению и описанию некоторого прямого дополнения в $\mathfrak{H}$ к подпространству $\mathfrak{P}$ почти периодических векторов. Именно, рассматривается подпространство $\mathfrak{d}\subset\mathfrak{H}$, состоящее из таких векторов f, для которых каждая слабая окрестность нуля содержит вектор вида Af ($A\in\mathfrak{G}$). Доказывается, что в случае рефлексивного пространства $\mathfrak{H}$ и коммутативной полугруппы G пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{d}$. Приведен также ряд близких результатов. Доказательства основываются на вложении полугруппы $\mathfrak{G}$, рассматриваемой на $\mathfrak{P}$, в некоторую группу и изучении подобных вопросов для последней.

Ю. М. Березанский

6501. **Заметка о сильно эргодической полугруппе операторов. Миядера** (A note on strongly ergodic semi-group of operators. Miyadera Isao), Kōdai Math. Semin. Repts, 1955, 7, № 2, 55—57 (англ.)

Полученное ранее автором (РЖМат, 1956, 1497) для случая целого $\alpha>0$ условие того, что полугруппа класса (0, A) принадлежит классу $(0, C_\alpha)$, в реферируемой заметке переносится на случай любого $\alpha>0$ (формулировка условия сохраняется дословно с очевидной заменой в основном неравенстве факториалов соответствующими значениями Г-функции). Соответственно устанавливается необходимое и достаточное условие того, что замкнутый линейный оператор служит полным производящим оператором некоторой полугруппы класса $(0, C_\alpha)$, где α — произвольное положительное число. В последнем разделе заметки приводится пример полугруппы класса (0, A), не принадлежащей к классу (1, A), но при описании этого примера в одном абзаце литографированного текста не вписаны символы. Д. А. Васильков

6502. **О работах польских математиков по теории обобщенных функций и операционному вычислению, Микусинский. Я.,** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 169—172

Приводятся определение обобщенных функций «по Микусинскому» как пределов слабо сходящихся последовательностей непрерывных функций (РЖМат, 1957, 1611), определение и основные свойства значения обобщенной функции f в точке β. Это последнее определяется как предел (если он существует) величины $f(\alpha x+\beta)$ при $\alpha\to 0$, причем $f(\alpha x+\beta)$ есть $\lim F_n(\alpha x+\beta)$, если $f(x)$ определена (по Микусинскому) как $\lim F_n(x)$. (Эквивалентное определение $f(\beta)$ в системе определений Соболева—Шварца есть $\lim(f, \varphi_\nu)$, где $\{\varphi_\nu(x)\}$ — последовательность основных функций, сходящаяся к $\delta(x-\beta)$. *Реф.*). Формулируются (без доказательств) теоремы: если $f(\beta)\equiv 0$, то $f=0$; $f(\beta)$ существует тогда и только тогда, когда f есть производная k-го порядка от такой непрерывной функции $F(x)$, что $\lim_{x\to\beta} F(x-\beta)\times(x-\beta)^{-k}=0$; если существует $f'(\beta)$ в обычном смысле, то $f'(\beta)$ есть значение обобщенной функции $f'(x)$ в точке β.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от обобщенной функции $f(x)$ строится как разность значений первообразной от функции $f(x)$ в точках b и a.

В заключение автор указывает на построение им операционного исчисления на конечном интервале.
Г. Е. Шилов

6503. О произведении распределений Хевисайда. Фрейташ (Un produit multiplicatif de distributions de Heaviside. Freitas A. Cesár de), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1955—1956, A5, № 1, 135—146 (франц.)

Определяется умножение в множестве $\mathfrak{H}_\infty$ — распределений (одного действительного переменного), называемых «распределениями Хевисайда бесконечного класса» (РЖМат, 1957, 5693). Это умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения. Правило дифференцирования произведения обычное. Если одним из распределений является бесконечно дифференцируемая функция, то произведение совпадает с произведением в смысле Л. Шварца (Théorie des distributions, 1, p. 115). Однако в общем умножение некоммутативно. Например, если $f \in \mathfrak{H}_\infty$ есть функция и δ_a — распределение Дирака с особенностью в точке a, то $\delta_a f = f(a-)\,\delta_a$ и $f\delta_a = f(a+)\,\delta_a$. Отмечается, что $\delta_a^{(i)}\delta_b^{(j)} = 0$ для $i, j = 0, 1, \ldots$

Примечание референта. Условие A_2 на стр. 138 некорректно: вместо δ должно быть δ_a. Железный (Z. Zieleźny) заметил, что условие A_2), грубо говоря, есть следствие условий A_1), A_3), A_4).
R. Sikorski

6504. Обобщенные функции и их применения. Шилов (Узагальнені функції та їх застосування. Шилов Г. Є.), Наук зап. Київськ. ун-та, 1954, 13, № 8, 149—160 (укр.; рез. русск.)

Обзор развития понятия функции от классического его понимания до понятия обобщенной функции. Указываются применения обобщенных функций в вопросе о единственности задачи Коши для уравнений с частными производными.

6505. Распределения, определенные как пределы. I. Распределения как производные; непрерывность. Равец (Distributions defined as limits. I. Distributions as derivatives: continuity. Ravetz J. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 1, 76—92 (англ.)

Следуя Микусинскому и Темплу, автор определяет распределение как обобщенный предел последовательности непрерывных функций. Пусть $\mathscr{T}$ — некоторый класс бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, причем несущие множества функций $\varphi(x)$ не обязательно компактны. Последовательность непрерывных функций $\{g_n(x)\}$ называется $\mathscr{T}$-регулярной, если для всех $\varphi \in \mathscr{T}$ и $n = 1, 2, \ldots$ интегралы $g_n\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\varphi(x)\,dx$ сходятся и имеют конечный предел $\lim_{n\to\infty} g_n\varphi$. Классы эквивалентных между собой $\mathscr{T}$-регулярных последовательностей образуют пространство распределений $\mathscr{T}'$, причем если $\{g_n\} \in G \in \mathscr{T}'$, то, по определению, $G\varphi = \lim_{n\to\infty} g_n\varphi$. Исходя из этого определения, автор повторяет известные теоремы, содержащиеся в монографии Л. Шварца, о том, что всякое распределение локально является обобщенной производной непрерывной функции и что в связи с этим функционал G продолжается по непрерывности из класса бесконечно дифференцируемых функций $\mathscr{T}$ в соответствующий класс функций, дифференцируемых конечное число раз.
В. Э. Лянце

6506 К. Теория распределений. Т. I. Шварц (Théorie des distributions. Tome I. Schwartz L. Actualités scient. et industr., 1957, № 1245, Paris, Hermann, 162 p.) (франц.)

Второе издание I тома широко известной монографии Шварца (первое издание вышло в 1950 г.). Большая часть текста первого издания сохранена; добавлены указания на новые работы. Существенному изменению подвергся только конец 5-й главы (эллиптические уравнения, элементарные ядра).

Гл. I. Основное пространство $\mathscr{D}$ есть совокупность всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Пространство $\mathscr{D}_K$ — совокупность тех $\varphi \in \mathscr{D}$, которые обращаются в нуль вне компакта K. В пространстве $\mathscr{D}_K$ введена естественная топология. Распределение есть линейный функционал $T(\varphi)$ на пространстве $\mathscr{D}$, непрерывный на каждом $\mathscr{D}_K$. Примеры: распределение типа функции $T(\varphi) = \int T(x)\varphi(x)\,dx$ ($T(x)$ — локально интегрируемая функция), распределение типа меры $T(\varphi) = \int \varphi(x)\,d\rho(x)$ ($\rho(x)$ — локально интегрируемая мера), дельта-функция $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.

Распределение T называется равным нулю в области U, если для любого компакта $K \subset U$ и любой функции $\varphi \in \mathscr{D}_K$ $T(\varphi) = 0$. Дополнительное замкнутое множество к объединению всех областей, где распределение T равно нулю, называется носителем (support) распределения T.

Если $T(\varphi) \geqslant 0$ для всякой $\varphi(x) \geqslant 0$, то T — распределение типа положительной меры.

Гл. II. Производная распределения T определяется по формуле $\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$. Всякое распределение бесконечно дифференцируемо. В числе примеров: конечные части (parties finis) интегралов Адамара, формула $\Delta(1/r) = -4\pi\delta$ и ей аналогичные, дифференцирование по z и $\bar{z}$ в комплексной плоскости, гиперболические потенциалы М. Рисса. Существование первообразных. Построение распределения по его частным производным, условия совместности.

Гл. III. В пространстве $\mathscr{D}$ вводится топология, как в индуктивном пределе пространств $\mathscr{D}_K$ (РЖМат, 1956, 2760). Соответственно в пространстве $\mathscr{D}'$ распределений вводится сильная топология (со сходимостью, равномерной на ограниченных множествах пространства $\mathscr{D}$). Формулируются теоремы о рефлексивности пространств $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ и о плотности $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}'$. Доказывается, что дифференцирование есть непрерывная операция в топологии $\mathscr{D}'$. Слабая сходимость в пространстве $\mathscr{D}'$ совпадает с сильной; поэтому из условия $T_n(\varphi) \to 0$ для каждой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}$ следует, что $\frac{\partial T_n}{\partial x_k}\varphi \to 0$.

Локально каждое распределение есть производная некоторого порядка от непрерывной функции. Распределение, носитель которого — одна точка a, есть линейная комбинация дельта-функции δ_a и ее производных.

Гл. IV. Если T_x и S_y — распределения в пространствах функций от x и y соответственно, то в пространстве функций $\varphi(x, y)$ существует и единственно распределение $T_x \otimes S_y$, которое на произведениях $\varphi(x)\psi(y)$ имеет вид $T(\varphi)\cdot S(\psi)$; оно называется тензорным (в первом издании — прямым) произведением распределений T_x и S_y.

Гл. V. Умножение распределения T на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ задается формулой $aT.\varphi = a.T\varphi$. Рассматривается вопрос об обращении этой операции. Автор указывает, что им решена проблема о делении распределения на любую аналитическую функцию; доказательство будет опубликовано в Summa brasiliensis math. В тексте имеется несколько простых примеров деления. Наличие умножения на бесконечно дифференцируемые функции позволяет рассматривать в пространстве распределений линейные дифференциальные уравнения с бесконечно дифференцируемыми

коэффициентами и системы таких уравнений. Для обыкновенных уравнений без особенностей все решения в однородном случае — обычные функции; в общем случае это не имеет места. Распределение e_a, удовлетворяющее для данного дифференциального оператора D и данной точки a уравнению $De_a = \delta_a$, называется элементарным решением; указываются элементарные решения для типичных операторов математической физики.

Элементарным ядром называется распределение E_{xy}, удовлетворяющее уравнению $ED\varphi(x) = \varphi(y)$. Если $E_{xy}\varphi(x)$ всегда есть бесконечно дифференцируемая функция от y, то ядро E называется весьма (très) регулярным. Оператор D, у которого все решения уравнения $DT = f$ с бесконечно дифференцируемой f сами бесконечно дифференцируемы, называется гипоэллиптическим. В частности, оператор, обладающий весьма регулярным элементарным ядром, всегда гипоэллиптичен, и притом из условий $f_n \Rightarrow 0$ ($\Longrightarrow 0$ означает равномерное стремление к нулю на каждом компакте, вместе со всеми производными), $T_n \to 0$ в D', $DT_n = f_n$ следует $T_n \Rightarrow 0$.

Эти определения и построения отличны от аналогичных построений первого издания; автор указывает на одно ошибочное место (стр. 138 первого издания, строки 14—4 снизу), которое привело к необходимости перестройки. Указывается, что обыкновенные дифференциальные операторы, а также Δ^k, $(1 - c^2\Delta)^k$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$, и эллиптические операторы И. Г. Петровского обладают весьма регулярными элементарными ядрами.

Автор ставит проблемы: 1. Является ли дифференциальный оператор D, у которого все решения уравнения $DT = 0$ бесконечно дифференцируемые, гипоэллиптическим? 2. Является ли оператор D, у которого каждое достаточно гладкое решение уравнения $DT = 0$ бесконечно дифференцируемо, гипоэллиптическим? Для оператора D с постоянными коэффициентами положительное решение обеих проблем будет дано во втором томе. Г. Е. Шилов

6507 К. Элементы математики. I. Основы анализа. XXI. Книга VI: Интегрирование. Гл. 5. Интегрирование мер. Бурбаки (Éléments de mathématique. I. Les structures fondamentales de l'analyse. XXI. Livre VI: Intégration. Chap. 5. Intégration des mesures. Bourbaki N. Actualités scient. et industr. № 1244, 1957, 131 p.) (франц.)

Изучается интегрирование в локально компактных пространствах. В дальнейшем T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T.

В § 1 вводится понятие индуцированной меры μ_X, определяемой на локально компактном подпространстве $X \subset T$ посредством меры μ с помощью равенства $\int_X g d\mu_X = \int g d\mu$, которое должно выполняться для любой непрерывной функции g с компактным носителем, содержащимся в X. Вводится понятие μ-плотного семейства компактных множеств. С помощью этих понятий устанавливается критерий μ-измеримости отображения μ-измеримого подмножества $A \subset T$ в топологическое пространство G, представляющий обобщение C-свойства Лузина.

В § 2 для функции $f \geqslant 0$, заданной на T, определяется существенный верхний интеграл $\bar{\mu}^*(f)$ как верхняя грань значений верхнего интеграла в обычном смысле $\int_K^* f d\mu$, где K пробегает всевозможные компактные подмножества из T. Далее рассматриваются функции f, отображающие T в вещественное банахово пространство F, и вводится обозначение $\overline{N}_1(f) = \bar{\mu}^*(|f|)$; через $\overline{\mathscr{F}}_F^1$ обозначается множество всех таких функций, для которых $\overline{N}_1(f) < +\infty$. Функция $\overline{N}_1(f)$ обладает свойствами полунормы в множестве $\overline{\mathscr{F}}_F^1$ и порождает в нем топологию.

Среди функций $f \in \overline{\mathscr{F}}_F^1$ выделяется подкласс функций, μ-интегрируемых в существенном: так называются все функции, являющиеся в пространстве $\overline{\mathscr{F}}_F^1$ точками прикосновения подпространства, состоящего из непрерывных функций с компактными носителями. Далее вводится обобщение понятия интеграла. Устанавливается, что для μ-интегрируемости в существенном функции $f \in \overline{\mathscr{F}}_F^1$ необходимо и достаточно, чтобы f была μ-измеримой. Если T есть соединение счетного множества интегрируемых множеств, то понятия μ-интегрируемости в существенном и μ-интегрируемости в обычном смысле совпадают.

В § 3 вводится понятие интеграла $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$ (по мере μ) семейства положительных мер $\{\lambda_t\}$, где λ_t при каждом $t \in T$ — положительная мера на некотором локально компактном пространстве X; при этом ν — также мера на X. Изучается вопрос о сведении интегрирования по ν к повторному интегрированию по λ_t и по μ. Затем рассматриваются суммируемые семейства $\{\lambda_\alpha\}$ положительных мер с произвольными индексами α, т. е. такие семейства, для которых имеет смысл сумма $\nu = \sum_\alpha \lambda_\alpha$ (ν — также положительная мера).

В § 4 рассматривается интегрирование точечных положительных мер. Результаты предыдущего параграфа применяются к семейству мер $\lambda_t = g(t)\varepsilon_{\pi(t)}$, где π — отображение пространства T в X, $g(t) \geqslant 0$ — конечная вещественная функция на T, $\varepsilon_x(x \in X)$ — мера в X, порождаемая единичной массой, помещенной в точке x.

В § 5 изучаются меры, определяемые плотностью (с числовыми значениями). Пусть $g(t)$ — конечная вещественная функция на T, локально μ-интегрируемая. Мерой с плотностью g относительно меры μ (обозначение: $g \cdot \mu$) называется мера, порождаемая на T функциональным отображением $f \to \int f g d\mu$ (здесь $f(t)$ — непрерывные функции с компактными носителями). Каждая такая мера $g \cdot \mu$ называется мерой с базой μ. Для мер с базой μ устанавливается теорема Лебега—Никодима, дающая их полную характеристику. Множество мер на T изучается как полупорядоченное пространство. В частности, множество мер с базой μ совпадает с компонентой, порождаемой мерой μ. Дается разложение произвольной меры на рассеянную (соответствует принятому в русской литературе термину «непрерывная») и атомическую.

§ 6 посвящен рассмотрению образов мер. Отображение π пространства T в локально компактное пространство X называется μ-собственным, если π является μ-измеримым и для всякого компактного множества $K \subset X$ его прообраз $\pi^{-1}(K)$ является μ-интегрируемым в существенном. Тогда мера $\int \varepsilon_{\pi(t)} d\mu(t)$ на X называется образом $\pi(\mu)$ меры μ. Если $\nu = \pi(\mu)$, то для любой непрерывной функции f на X с компактным носителем справедливо соотношение

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int f(\pi(t))\, d\mu(t).$$

В качестве приложения рассматривается замена перзменной под знаком интеграла Лебега.

В § 7 рассматриваются индуцированные меры. Если X — локально компактное подпространство пространства T, то индуцированную меру μ^X можно предста-

вить как интеграл $\mu_X = \int \lambda_t \, d\mu(t)$, где $\lambda_t = \varepsilon_t$ при $t \in X$, $\lambda_t = 0$ при $t \notin X$. Интегрируемость в существенном по мере μ_X равносильна μ-интегрируемости в существенном в X. Устанавливается ряд свойств индуцированной меры.

В § 8 изучается кратное интегрирование на произведении локально компактных пространств, в частности, устанавливается теорема Лебега—Фубини.

В конце книги дается исторический обзор развития понятий меры и интеграла. Б. З. Вулих

6508 К. Лекции по функциональному анализу. Рисс, Надь (Vorlesungen über Funktionalanalysis. Riesz Friedrich, Sz.-Nagy Béla. Übers. aus dem Franz. 2. and 3. Aufl. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 482 S.) (нем.)

Перевод с французского (2-е и 3-е изд.) По содержанию от русского перевода (РЖМат, 1955, 5144) отличается добавлением Надя ко 2-му изданию (РЖМат, 1956, 6717).

См. также: 6254, 6258, 6261, 6351, 6365, 6398, 6445 6446.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6509. О предельном распределении для сумм независимых случайных величин на бикомпактных коммутативных топологических группах. Прекопа А., Реньи А., Урбаник К., Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 1, 11—16 (рез. англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, значения которых являются элементами некоторой коммутативной бикомпактной топологической группы G и $P(\xi_k \in U) > 0$ для всех непустых открытых подмножеств $U \in G$. Тогда последовательность мер μ_n, определенных равенствами $\mu_n(E) = P(\xi_1 + \ldots + \xi_n \in E)$ для любого измеримого E, сходится слабо к нормированной мере Хаара группы G.

Попутно получается новое, теоретико-вероятностное доказательство существования меры Хаара на коммутативных сепарабельных бикомпактных группах.

Н. Н. Воробьев

6510. Центрально-смещенное дискретное случайное блуждание. Гиллис (Centrally biased discrete random walk. Gillis J.), Quart. J. Math., 1956, **7**, № 26, 144—152 (англ.)

Пусть m обозначает целую точку $(m_1, m_2, \ldots, m_d)$ d-мерного пространства и E_i — единичный вектор, параллельный положительному направлению i-й координатной оси. Рассматривается случайное блуждание, начинающееся в центре координатной системы и допускающее только переходы вида $m \to m \pm E_i$ с соответствующими вероятностями $P_i(m)$, $Q_i(m)$. Точка пространства называется рекуррентной, если траектория блуждания с вероятностью 1 проходит через нее бесконечно много раз. Основной результат дается теоремой: Пусть $P_i(m) = (1 - \varepsilon/m_i)/2d$, $Q_i(m) = (1 + \varepsilon/m_i)/2d$, $i = 1, 2, \ldots, d$ при $m_i \neq 0$ и $P_i(m) = Q_i(m) = 1/2d$, если $m_i = 0$. Тогда начало координат будет рекуррентным или нет в соответствии с неравенствами $\varepsilon > (d-2)/2d$ или $\varepsilon < (d-2)/2d$. И. И. Гихман

6511. Строго стационарные марковские процессы и их корреляции. Тортра (Les processus strictement stationnaires de Markoff et leurs corrélations. Tortrat A.), J. math. pures et appl., 1953, **32**, № 4, 281—333 (франц.)

Пусть Ω — пространство возможных состояний марковского процесса $X(t)$, где $0 \leqslant t < \infty$, и пусть $f(x)$, $x \in \Omega$, — ограниченная и измеримая функция по отношению к борелевскому телу множеств, данному в Ω. Процесс $f(X(t))$ рассмотрен с помощью метода оператора (Yosida, Kakutani, Ann. Math., 1941), используя современную теорию функционального анализа. Марковость и стационарность процесса влекут за собой то, что операторы $A(t)$, определенные для $f(X(t))$, образуют полугруппу, которая частично разложима. Задача построения $A(t)$ отправляется от исследования $A(1)$.

Основной результат, касающийся корреляционной функции $\rho(t)$, есть формула, выражающая спектральное распределение $F(x)$, характеристическая функция которого есть $\rho(x)$, через интеграл, в котором подинтегральное выражение зависит от резольвенты оператора $a = \lim_{t \to 0} [A(t) - J]/t$, где $J^2 = J = \lim_{t \to 0} A(t)$ в сильном смысле.

Дается много примеров, касающихся построения всех возможных цепей и корреляции $\rho(t)$.

А. Prékopa

6512. Типичные функции для сумм неотрицательных независимых случайных величин. Кавата (Typical functions of sums of non-negative independent random variables. Kawata Tatsuo), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 1, 13—22 (англ.)

Функция $\Phi(h)$, определяемая соотношением $\Phi(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 (x^2 + h^2)^{-1} \, dF(x)$, $h > 0$, где $F(x)$ — функция распределения случайной величины X называется типичной функцией величины X.

Изучается поведение типичных функций для сумм неограниченно возрастающего числа неотрицательных независимых случайных величин.

Пусть последовательность $\{X_i\}$ неотрицательных независимых случайных величин, с функциями распределения $F_i(x)$, подчиняется условиям

1) $0 < \int_0^\infty x dF_i(x) < +\infty \quad (i = 1, 2, \ldots)$,

2) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty x dF_i(x) = m$,

3) $\lim_{A \to \infty} \int_A^\infty x dF_i(x) = 0$ равномерно по i.

4) Существуют положительные константы A, δ, $p > 1$, для которых $F_i(x) - F_i(0) \leqslant Ax^p$ для $0 < x < \delta$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда, если $\Phi_n(h)$ — типичная функция для суммы $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, то имеют место соотношения:

1) $\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(h) = \frac{\pi}{2m}$,

2) $\lim_{n \to \infty} \Phi_n(nh) = \frac{h^2}{m^2 + h^2}$.

Доказательство проводится с помощью трансформаций Лапласа с использованием известного соотношения

$$\int_0^\infty e^{-ay} \sin hy \, dy = h/(a^2 + h^2).$$

А. А. Бобров

6513. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, принимающих значения из бикомпактной группы. Клосс Б. М., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 3, 453—455

Закон распределения называется устойчивым на группе G, если соответствующая ему мера на G является идемпотентной относительно операции свертки (группа G мультипликативна, а произведение условно называется суммой).

Устанавливается, что из существования предела нарастающей суммы независимых одинаково распределенных слагаемых на бикомпактной группе вытекает его устойчивость. Всякий устойчивый закон является предельным в указанном смысле.

Если μ — мера на G, то носителем μ (обозначение: $\omega(\mu)$) называется наименьшее замкнутое множество, мера μ которого равна 1.

Доказывается, что для того, чтобы последовательность $\mu, \mu^2, \ldots, \mu^n, \ldots$ сходилась к устойчивому закону e_α, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(\mu)$ не содержался ни в каком классе смежности G по подгруппе $\omega(e_\alpha)$, отличном от этой подгруппы.

Если $E \subset G$, и для меры μ существует такое x_0, что $\omega(\mu)\, x_0 \subset E$, то мера $\mu' = \mu x_0$ называется проекцией меры μ на E. Если G удовлетворяет аксиоме счетности и μ принадлежит идемпотенту e_α, то существует такое $x_0 \in G$, что меры

$$\mu x_0,\ \mu^2 x_0^2, \ldots, \mu^n x_0^n, \ldots \qquad (1)$$

являются проекциями мер $\mu, \mu^2, \ldots, \mu^n, \ldots$ на $\omega(e_\alpha)$ и последовательность (1) сходится к инвариантной мере e_α. Н. Н. Воробьев

6514. Предельные теоремы для некоммутативных операций. I. Белман (Limit theorems for noncommutative operations. I. Bellman Richard), Duke Math. J., 1954, 21, № 3, 491—500 (англ.)

Пусть $Z_1, \ldots, Z_k, \ldots$ — последовательность случайных матриц (т. е. переменных матриц, равным тем или иным постоянным матрицам с некоторыми вероятностями), независимых и одинаково распределенных. Рассматривается случай, когда для всех k $P(Z_k = A) = P(Z_k = B) = 1/2$, где A и B — фиксированные 2×2 матрицы (указывается, что эти ограничения несущественны) с положительными элементами. Доказывается, что при $|A|, |B| > 0$ (в конце статьи отмечается, что и это ограничение можно снять) и $N \to \infty$ $E(\log x_{iN}) \sim N\alpha_i$, где

$$X_N = Z_N \ldots Z_2 Z_1 = \begin{pmatrix} x_{1N} & x_{2N} \\ x_{3N} & x_{4N} \end{pmatrix},$$

а α_i — некоторые постоянные, зависящие от A и B. Н. Н. Воробьев

6515. Анализ временных рядов. Нагабхушанам (Inference in time series. Nagabhushanam K.), Proc. 43 Indian Sci. Congr. Assoc. Part 2. Calcutta, 1956, 42—52 (англ.)

Приводится текст выступления президента секции статистики Ассоциации индийского научного конгресса на 43-м съезде Ассоциации. После обсуждения вопросов преподавания статистики в высшей школе дается краткий обзор исследования в области статистического анализа временных рядов, включая работы Колмогорова и Дуба по случайным процессам и последовательностям, Крамера и Карунена по спектральному представлению случайных процессов. Подробно излагаются сведения об оценочных процедурах, применяемых при анализе временных рядов: выясняются трудности в использовании метода максимума правдоподобия, упоминаются обычные критерии состоятельности, несмещенности и минимальной дисперсии, излагаются идеи экстраполяции и фильтрации случайных процессов, вводится понятие о спектре стационарного случайного процесса (в определении Хинчина) и излагаются способы оценки спектральной функции (работы Гренандера). Описываются приложения к вопросам экономики. Следуя Гренандеру и Уиттлу автор излагает вопрос о критериях для проверки гипотез о временных рядах. Библ. 20 назв. А. С. Монин

6516. Эквивалентность асимптотических распределений в нормальном случае и при рандомизации. Силви (The equivalence of asymptotic distributions under randomisation and normal theories. Silvey Samuel D.), Proc. Glasgow Math. Assoc 1., 1953, 1, № 3, 139—147 (англ.)

Пусть имеется последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, каждая из которых распределена нормально (0, 1). Пусть $\{a_n\}$ — данная последовательность вещественных чисел, $\{X_n\}$ — последовательность случайных величин такая, что при любом n

$$P\{X_1 = a_{k_1}, \ldots, X_n = a_{k_n}\} = \frac{1}{n!}$$

для каждой перестановки $(k_1, \ldots, k_n)$, натуральных чисел $(1, \ldots, n)$. Пусть, далее, $t_n(x) \equiv t_n(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, удовлетворяющая условиям: (a) $t_n(kx_1, \ldots, kx_n) = t_n(x_1, \ldots, x_n)$ для любого $k > 0$, (b) $t_n(x_1 + c, \ldots, x_n + c) = t_n(x_1, \ldots, x_n)$ для любого c.

Для одного подкласса класса последовательностей $\{t_n\}$ указываются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы при всех c

$$\lim_{n\to\infty} P\{t_n(\xi) < c\} = \lim_{n\to\infty} P\{t_n(X) < c\}.$$ В. В. Петров

6517. Определение вероятности, содержащейся внутри области, через значения функции распределения на контуре. Сороа-Тероль (Determinación de la probabilidad interior a un recinto mediante la función de distribución en el contorne. Zoroa Terol Procopio), Rev. Real. acad. cient. exact., fis. y natur. Madrid, 1954, 48, № 3, 151—169 (исп.)

Пусть (ξ, η) — двумерная случайная величина и $F(x, y)$ — ее функция распределения. Доказывается, что для области частного вида, ограниченной замкнутой ломаной со звеньями, параллельными координатным осям, масса вероятности, заключенная внутри этой области, зависит только от значений $F(x, y)$ в угловых точках ломаной. Если дана замкнутая и спрямляемая жорданова кривая Г, то доказывается, что для определения массы вероятности, заключенной внутри области, ограниченной Г, достаточно знать значения $F(x, y)$ в произвольно узкой полосе, содержащей внутри данную кривую Г. Указывается также, что условие $F(x, y) = \Phi(x, y)$ в полосе, содержащей Г, не является необходимым для равенства масс вероятности, определяемых F и Φ. R. Theodorescu

6518. Необходимые и достаточные условия существования дискретного предельного закона у цепи Маркова из двух состояний. Сарманов О. В., Докл. АН СССР, 1956, 110, № 5, 735—738

Рассматривается последовательность серий испытаний, имеющих два возможных исхода A и $\overline{A}$, связанных в простую неоднородную цепь Маркова, причем n-я серия состоит из n испытаний и ставится вопрос об условиях существования предельного распределения вероятностей

$$\lim_{n\to\infty} P_{s,n} = P_s \quad \left(s = 0, 1, 2, \ldots;\ \sum_{s=0}^{\infty} P_s = 1\right), \qquad (1)$$

где $P_{s,n}$ — вероятность s-кратного появления A в n-й

серии. Пусть $p_{1,n}$ — вероятность появления A в первом испытании n-й серии, $\alpha_{k,n}$, $\beta_{k,n}$ $(k=2, 3, \ldots, n)$ — вероятности перехода соответственно от A и $\overline{A}$ в $(k-1)$-м испытании к A в k-м испытании и выполняются два требования: существуют пределы $\lim_{n\to\infty} p_{1,n}=p_1$ и $\lim_{n\to\infty} \sup_{2\leqslant k\leqslant n}\beta_{k,n}=0$. Тогда, для существования предельного распределения (1) необходимо и достаточно существования пределов

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{\infty}\beta_{i,n}=\gamma<+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n-k}\beta_{i,n}\alpha_{i+1,n}\alpha_{i+2,n}\cdots\alpha_{i+k,n}=\gamma_{k+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{2,n}\alpha_{3,n}\cdots\alpha_{k,n}=\pi_k(k=2, 3, \ldots);$$

$$\lim_{k\to\infty}\pi_k=\lim_{k\to\infty}\gamma_k=0.$$

Характеристическая функция предельного распределения имеет вид

$$\varphi(t)=e^{\mu(t)-\gamma}\{1+p_1[\lambda(t)-1]\},\ \text{где}\ \mu(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k-\gamma_{k+1})e^{ikt},$$

$$\lambda(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(\pi_k-\pi_{k+1})e^{ikt},\quad \gamma_1=\gamma,\quad \pi_1=1.$$

А. А. Бобров

6519. Теория вероятностей как орудие исследования в естественных науках и производстве. Штейнхаус (Rachunek prawdopodobieństwa jako narzędzie badan w przyrodoznawstwie i produkcji. Steinhaus H.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. I, 2, № 1, 27—55 (польск.)

Статья создана в сотрудничестве с Чеховским, Фишем, Ланге, Одерфельдом и Садовским (Czechowski T., Fisz M., Lange O., Oderfeld J., Sadowski W.) и прочитана в качестве реферата на 8-м конгрессе польских математиков в Варшаве 8 сентября 1953 г.

6520. О распределении размаха частичных сумм независимых случайных величин. Анис (On the distribution of the range of partial sums of independent random variables. Anis A. A.), Proc. Math. Phys. Soc. Egypt., 1953 (1954), 5, № 1, 83—89 (англ.)

6521. Стохастические ветвящиеся процессы. Форте (Les processus stochastiques en cascades. Fortet R.), Trabajos Estadistica, 1953, 4, 11—34 (франц.)

6522. Полная аддитивность вероятностей. Каппос (Die Totaladditivität der Wahrscheinlichkeit. Kappos Demetrios A.), Bull. Soc. Math. Grèce, 1954, 28, 63—80 (нем.)

6523. Проблема обобщения неравенства Бьенемэ. Комб (Le problème de la généralisation de l'inégalité de Bienaymé. Combes B.), Bull. Trimest. Inst. Actuaires Français, 1953, 52, 61—69 (франц.)

6524. Вероятностное заключение как синтаксическая форма заключения. Юхош (Wahrscheinlichkeitsschlüsse als syntaktische Schlussformen. Juhos Béla), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. XIV, pp. 105—108. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (нем.)

6525. Прямая вероятность индукций. Вильямс (On the direct probability of inductions. Williams Donald D. C.), Mind. 1953, 62, 465—483 (англ.)

6526 Д. Стохастические множественные зависимости. Прекопа (Sztochasztikus halmazfüggvények. Kand, értekezés tézisei. Prékopa Andras. Tudományos Minösitö Bizottság. Budapest., 1956, 71), Magyar nemzeti bibliogr., 1956, № 6, 192 (венг.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6527. О стохастической независимости двух полиномиальных статистик второй степени от нормально распределенных случайных величин. Лаха (On the stochastic independence of two second-degree polynomial statistics in normally distributed variates. Laha R. G.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 790—796 (англ.)

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — нормально распределенный случайный вектор с матрицей вторых моментов Σ. Рассматриваются полиномиальные статистики второй степени $P_1=xAx'+lx'$ и $P_2=xBx'+mx'$, где A и B — вещественные симметричные матрицы n-го порядка, l и m — n-мерные векторы и штрих обозначает транспонирование.

Доказаны теоремы:

1. Для независимости статистик P_1 и P_2 необходимо и достаточно, чтобы $A\Sigma B=0$, $l\Sigma B=0$, $m\Sigma A=0$, $l\Sigma m'=0$.

2. Если компоненты $x_1, \ldots, x_n$ независимы, одинаково распределены и дисперсия каждой из них равна 1, то в случае независимости статистик P_1 и P_2 существует ортогональное преобразование $y=xT$, переводящее одновременно P_1 и P_2 соответственно в статистики $P_1'(y_1, \ldots, y_k)$, $P_2'(y_{k+1}, \ldots, y_n)$, не содержащие случайных величин y_i с одинаковыми индексами.

Теорема 1 для случая $l=0$, $m=0$ была известна ранее. Теорема 2 подтверждает для частного случая справедливость более общего предположения Ю. В. Линника, состоящего в том, что аналогичное утверждение имеет место для полиномиальных статистик любой степени. Отмечается, что этот результат независимо от автора получен также А. А. Зингером.

И. П. Кубилюс

6528. Матричные методы в компонентах вариационного и ковариационного анализа. Серл (Matrix methods in components of variance and covariance analysis. Searle S. R.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 737—748 (англ.)

Рассматривается линейная модель (модель II Эйзенхарта) $x_{ij}=\mu+\sigma_i+\varepsilon_{ij}$, где x_{ij} есть j-е наблюдение в i-м классе, состоящем из n_i наблюдений $(j=1, \ldots, \ldots, n_i)$, μ — общая средняя из всех наблюдений и $\{\alpha_i\}$ и $\{\varepsilon_{ij}\}$ — случайные выборки объемов c, и $N=\sum_{i=1}^{c}n_i$ из нормально распределенных совокупностей со средними равными 0 и вариациями σ_a^2 и σ^2 соответственно.

Используя матричные методы, автор дает оценки наименьших квадратов для σ_a^2 и σ_e^2, а также выборочные вариации и ковариации этих оценок и выборочные вариации и ковариации оценок максимального правдоподобия. Этим же методом получаются оценки компонент ковариации и их выборочные вариации, когда рассматриваются две переменные.

Р. Х. Дивеев

6529. «Непараметрический» (независимый от вида распределения) вывод дисперсии множественных ($R_{z\cdot xy}$) и частных ($R_{xy\cdot z}$) коэффициентов корреляции для случая так называемой нуль-гипотезы, а также отвечающих этой гипотезе средних квадратических отклонений коэффициентов регрессии.

Андерсон (Eine «nicht-parametrische» (verteilungsfreie) Ableitung der Streuung (variance) des multiplen ($R_{\cdot xy}$) und partiellen ($R_{xy\cdot z}$) Korrelationskoeffizienten im Falle der sogenannten Null-Hypothese, sowie der dieser Hypothese entsprechenden mittleren quadratischen Abweichungen (standard deviations) der Regressionskoeffizienten. Anderson Oskar), Mitteilungsbl. math. Statist., 1955, 7, № 2, 85—112 (нем.)

Находятся приближенные, с точностью до членов порядка $1/n^2$ (n — объем выборки) выражения для дисперсий указанных в заглавии корреляционных характеристик в условиях «нулевой» гипотезы. Эта последняя формулируется в двух видах. Второй из них (модель B) равносилен обычной стохастической независимости. Первый — упрощенная модель опыта (модель A) соответствует допущению, что каждая величина в каждом из n независимых наблюдений может принимать (независимо от других величин) с равной вероятностью одно из тех значений, которые фактически были наблюдены в n опытах. Найденные приближения не зависят от вида распределения рассматриваемых величин. Н. В. Смирнов

6530. **Модифицированное среднее квадратическое последовательных разностей и связанные с ним статистики. Гейссер** (The modified mean square successive difference and related statistics. Geisser Seymour), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 819—824 (англ.)

Рассматривается выборка объема $2m$ из нормальной совокупности $N(0, \sigma)$. Модифицированное среднее квадратическое последовательных разностей определяется формулой

$$\delta_0^2 = \frac{1}{4(m-1)} \sum_{i=1,\, i\neq m}^{2m-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

Доказывается, что эта статистика распределена асимптотически нормально. Изучаются некоторые статистики, родственные δ_0^2.

Для двух выборок размера $2m_1$ и $2m_2$ находится плотность отношения $\psi = \delta_{01}^2/\delta_{02}^2$, что позволяет построить критерий ξ, аналогичный критерию Фишера.

Приведена таблица, дающая верхние и нижние 2,5% точки для распределения величины δ_0^2/σ^2 и 5% двусторонние пределы для ξ при $n = 4\,(2)\,50$.

Формулы (2, 2) и (2, 3) содержат опечатки.

Б. Н. Гартштейн

6531. **О гипотезе «невзаимодействия» в многомерных таблицах сопряженности признаков. Рой, Кастенбаум** (On the hypothesis of no «interaction» in a multi-way contigency table. Roy S. N., Kastenbaum Marvin A.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 749—757 (англ.)

Пусть результаты n независимых испытаний расположены в виде трехмерной таблицы, n_{ijk} — наблюдаемые частоты, а p_{ijk} — вероятности (ijk)-й клетки $(i = 1, 2, \ldots, r)$; $(j = 1, 2, \ldots, s)$; $k = 1, 2, \ldots, t)$.

Вводятся обозначения: $p_{0jk} = \sum_i p_{ijk}; \ldots;$

$$p_{00k} = \sum_{i,j} p_{ijk}; \ldots; \quad p_{000} = \sum_{i,j,k} p_{ijk} \quad (p_{000} = 1).$$

Рассматриваются три вида нулевой гипотезы: (α) H_0: $p_{ijk} = p_{ij0}p_{00k}$ для всех i, j, k. (β). H_0: $p_{i0k} = p_{i00}p_{00k}$ и $p_{0jk} = p_{0j0}p_{00k}$. (γ) H_0: $p_{ijk} = q_{ij0}q_{i0k}q_{0jk}/q_{i00}q_{0j0}q_{00k}$, где не предполагается, что $q_{ij0} = p_{ij0}$ и т. д., и даже не предполагается, что $q_{i00} = \sum_j q_{ij0}$ и т. д.

Устанавливаются некоторые связи между этими тремя гипотезами. В частности доказано, что из гипотезы (γ), которая называется гипотезой о «невзаимодействии» i и j, следует гипотеза (α). Исключая из условий (γ) величины q_{ijk}, автор получает $(r-1)(s-1)(t-1)$ ограничений «невзаимодействия» для величин p_{ijk}.

Оказывается, что среди решений уравнения правдоподобия для величин p_{ijk} есть одно и только одно, $\hat{p}_{ijk}$, удовлетворяющее условиям:

1) $\hat{p}_{ijk} \underset{n\to\infty}{\to} p_{ijk}^{(0)}$ по вероятности,

2) $\sum_{i,j,k} (n_{ijk} - n\hat{p}_{ijk})^2/n\hat{p}_{ijk}$ имеет асимптотическое χ^2-распределение, с числом степеней свободы $(r-1)(s-1)(t-1)+1$.

Показаны методы нахождения таких оценок для таблиц $2\times 2\times 2$, $2\times 2\times t$ и $r\times s\times t$.

Б. Н. Гартштейн

6532. **Применение теории решающих функций к экономической оценке способов приемочной инспекции. Дивеев Р. Х.**, Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 17, 45—65

В первой части работы излагаются некоторые известные определения и результаты теории решающих функций Вальда в форме, удобной для использования в задачах приемочного контроля. Во второй части рассматриваются задачи приемочного контроля, проводимого в одну стадию. Доказывается следующее основное предложение: Пусть $W_1(p)$ и $W_2(p)$ — ограниченные, соответственно возрастающая и убывающая функции p, выражающие потери при приеме и отвержении партии объема N с долей p дефектных изделий. Тогда решающая функция δ минимизирует в среднем функцию риска относительно априорного распределения p $F(p)$, если согласно ей партия будет приниматься, когда число дефектных изделий в выборке объема $n > 0$ не более чем $m_n^0(F)$, и будет отвергаться, если это число не менее $m_n^0(F)$, где $m_n^0(F)$ определяется из равенства

$$\int_0^1 W_1(p)\, P\left(\sum_{k=1}^n x_k = m_n^0 \,|\, p\right) dF =$$

$$= \int_0^1 W_2(p)\, P\left(\sum_{k=1}^n x_k = m_n^0 \,|\, p\right) dF$$

и $x_k = 0, 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — выборочные значения. Далее полагается $W_1(p) = C_1 p$, $W_2(p) = C_2(1-p)$, $P\left(\sum_{k=1}^n x_k = m \,|\, p\right) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, и рассматриваются два частных случая $F(p)$: а) $F(p)$ с равномерной плотностью и б) $F(p)$ с плотностью вида $C_k e^{-kp}$ $(k > 0)$. В случае а) m_n^0 имеет особо простой вид:

$$m_n^0 = \frac{C_2(n+1) - C_1}{C_1 + C_2}.$$

В. С. Флейшман

6533. **О точности взвешенных средних и отношений. Джеймс** (On the accuracy of weighted means and ratios. James G. S.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 304—321 (англ.)

Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — результаты независимых измерений, нормально распределенные со средней μ и, вообще говоря, различными дисперсиями $\lambda_1\sigma_1^2, \ldots, \lambda_k\sigma_k^2$. Положительные постоянные λ_i известны, величины σ_i^2 неизвестны, но известны их оценки — выборочные диспер-

сии s_i^2, независимые между собой и от x_i. Объем выборки для определения s_i^2 равен n_i. Основная задача, поставленная в статье, состоит в определении доверительных пределов для μ. Такая задача может иметь приложение, когда требуется оценить генеральную среднюю по k выборочным средним выборок различного объема и с различными дисперсиями σ_i^2. Пусть

$$w_i = \lambda_i^{-1} s_i^{-2},\ w = \sum_{i=1}^{k} w_i,\ r_i = w_i/w,\ r = (r_1, \ldots, r_k),$$

$$\hat{x} = \sum_1^k w_i x_i / w\ \ (\sum r_i = 1),\ \nu = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \text{ и}$$

$u = (\hat{x} - \mu)\, w^{1/2}$.

Для $k = 2$ при заданном уровне P существует функция $u(r)$ такая, что

$$P(|u| \leqslant u(r)) = P + O(\nu^{-4}). \qquad (1)$$

Таблицы $u(r)$ при $k = 2$ даны для $P = 0{,}9$ и $P = 0{,}95$. Кроме того, приводятся приближенные решения уравнения (1) для любых k, рассматривается асимптотический случай выборок большого объема.

Решения иллюстрируются численными примерами. Приводится обобщение для многомерных распределений, т. е. когда $x_1, \ldots, x_k$ суть векторы.

А. М. Бендерский

6534. Геометрические основания дисперсионного анализа. Кокс (A geometrical derivation of the analyses of covariance and variance. Cox C. P.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **A119**, № 3, 333—335 (англ.)

Рассматривается n рандомизированных блоков, каждый из которых содержит данные по двум способам обработки. Результаты этих наблюдений интерпретируются как координаты n-мерного пространства.

На основании геометрических построений элементарным путем автор получает выражения дисперсии, ковариации, коэффициентов корреляции и регрессии между случайными результатами эксперимента.

А. М. Бендерский

6535. Оценка корреляции и регрессии в случае, когда результаты наблюдений заданы в виде отношения. Ку, Мейер (Correlation and regression estimates when the data are ratios. Kuh Edwin, Meyer John R.), Econometrica, 1955, **23**, № 4, 400—416 (англ.)

Изучается корреляция и регрессия между отношениями X/Z и Y/Z по коэффициентам вариации V_x, V_y, V_z и коэффициентам корреляции r_{xy}, r_{xz}, r_{yz}. Устанавливаются обстоятельства, при которых простой коэффициент корреляции между отношениями может быть несмещенной оценкой частных коэффициентов корреляции числителей отношений.

Показываются необходимые и достаточные условия получения наиболее эффективной несмещенной оценки регрессии параметров обращением в минимум суммы квадратов

$$\sum (X_i - k - bY_i)^2 Z_i^2,$$

где k и b — параметры линейной аппроксимации величины X.

А. М. Бендерский

6536. Совокупная оценка параметров и минимум дисперсии. Теодоракис (Simultaneous estimation of several parameters and the minimum variance. Theodorakis G.), Спудэ икономикэ, кинникэ техникэ, 1956, 6, № 7—8, 58—78 (греч.)

В первой и второй главах излагаются известные результаты по теории оценок параметров распределения по данным выборки, принадлежащие Дармуа, Фреше, Крамеру, Рао и Дюге. В третьей главе приводятся конкретные примеры нахождения оценок.

Н. В. Смирнов

6537. Примечание к работе «Некоторые дальнейшие результаты, касающиеся оценок при помощи совокупных доверительных интервалов». Рой (A note on «Some further results in simultaneous confidence interval estimation». Roy S. N.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 3, 856—588 (англ.)

Приводится доказательство одной леммы о характеристических числах матриц, использованной в указанной в заглавии работе автора (РЖМат, 1956, 8188). Предлагаются более узкие доверительные границы для одной из задач, рассмотренных в той же работе.

В. В. Петров

6538. Объем и значение теории дисперсии. Джини (Estensioni e portata della teoria della dispersione. Gini Corrado), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press Inc., 1954, 323—335 (итал.)

Для оценки независимости данных наблюдения, разбитых на группы по некоторому признаку, от номера группы рассматривается коэффициент (указатель) дисперсии, представляющий собой отношение наблюдаемого среднего квадратического уклонения к теоретическому, вычисленному в предположении такой независимости. Приводятся формулы для вычисления такого коэффициента в случае, когда статистические данные подчиняются схеме случайного выбора без повторений или случайного выбора с повторениями, а также указывается возможность обобщения на случай двойной (или же тройной и т. д.) группировки, когда группы в свою очередь разбиты на более мелкие группы по второму признаку. Для этих случаев также приводятся, но со ссылкой на другую работу (Giorn. Ist. Ital. degli Attuari, 1952, **15**, № 1—2), формулы для коэффициента дисперсии. Приводятся конкретные примеры, когда естественно пользоваться той или иной группировкой. Вопрос об оценке значимости отклонения коэффициента дисперсии от единицы не рассматривается.

М. Ф. Бокштейн

6539. О многомерном нормальном распределении. Френкель, Феллин (On multivariate normal probability distributions. Frenkiel François N., Follin James W., Jr), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 295—300 (англ.)

Пусть x, y, z — независимые случайные нормальные переменные с центрами μ_x, μ_y, μ_z и стандартными отклонениями σ_x, σ_y, σ_z. Определяются плотности распределения вероятностей:

а) случайной переменной $(x^2 + y^2)^{1/2}$, если $\mu_x \neq 0$, $\mu_y = 0$ и $\sigma_x \neq \sigma_y$;

б) случайной переменной $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, если $\mu_x \neq 0$, $\mu_y = \mu_z = 0$ и $\sigma_x \neq \sigma_y = \sigma_z$.

Относительно а) необходимо заметить, что более общая задача для случая $\mu_x \neq 0$, $\mu_y \neq 0$ и $\sigma_x \neq \sigma_y$ решена (РЖМат, 1955, 360). Метод решения задачи, как и окончательные выражения в реферируемой статье и в статье, указанной выше, различны. По-видимому, оба решения получены независимо друг от друга.

В случае б) выражения для плотности распределения вероятностей получаются довольно сложными. Автор указывает способ табулирования этой функции.

А. М. Бендерский

6540. Распределение суммы в случайной выборке из дискретной совокупности. Цзао Цзя-гуй (Distribution of the sum in random samples from a discrete population. Tsao Chia Kuei), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 3, 703—712 (англ.)

Рассматриваются одинаково распределенные дискретные случайные величины, принимающие значения

1, 2, . . ., k с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Сумма m таких величин изучается с помощью производящей функции

$$D(t; p, m) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i t^i\right)^m \quad (p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)).$$

Функции $g(s; p, m)$ и $G(s; p, m)$ определяются формулами $D(t; p, m) = \sum_s g(s; p, m)\, t^s$ и $G(s; p, m) = \sum_{y=m}^{s} g(y; p, m)$.

Выводятся некоторые соотношения для функций $D(t; p, m)$, $g(s; p, m)$ и $G(s; p, m)$, позволяющие найти численные значения $g(s; p, m)$ и $G(s; p, m)$, если p известно.

Для случая $p = 1/k$ ($p_1 = 1/k, \ldots, p_k = 1/k$) приводятся таблицы функции $G(s; p, m)$ для $k = 3, 4, 5, 6$ и $m = 1, 2, \ldots, 20$ при различных s.

Кроме того, приводится ряд таблиц для приближения функции $Q(s; p, m)$ нормальной функцией распределения $N(z; 0, 1)$, где

$$z = \left(s - m\sum_{i=1}^{k} i p_i\right) \Big/ \sqrt{m\left[\sum_{i=1}^{k} i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{k} i p_i\right)^2\right]}.$$

Б. Н. Гарттштейн

6541. Распределение и характеристики выборки в случае нормальной генеральной совокупности с неизвестными параметрами. Лоран (Distribution d'échantillon et de caractéristiques d'échantillon quand la population de référence est Laplace—Gaussienne de paramètres inconnus. Laurent André G.), J. Soc. statist. Paris, 1955, 96, № 10—12, 262—296 (франц.)

Рассматривается нормальная генеральная совокупность с параметрами m и σ, из которых один или оба неизвестны. Из генеральной совокупности извлекаются две выборки. В случае бесконечной совокупности одна из выборок считается большой и ее характеристиками заменяют неизвестные параметры совокупности при построении характеристик второй, независимой от первой, выборки.

В случае конечной генеральной совокупности меньшая выборка извлекается из большей. Находятся распределения, средние значения, дисперсии характеристик меньшей выборки, когда параметры генеральной совокупности заменяются характеристиками большей выборки.

Рассматриваются некоторые приложения полученных результатов. Так, например, пользуясь полученными формулами, автор предлагает построения более эффективных, по сравнению с применяемыми, карт статистического контроля текущей продукции. Автор указывает также на то, что из его формул многие классические результаты могут быть получены прямым путем. Б. Н. Гарттштейн

6542. Поведение одной статистической оценки для простого процесса рождения и смерти. Дарвин (The behaviour of an estimator for a simple birth and death process. Darwin J. H.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 23—31 (англ.)

Рассматривается процесс с постоянными вероятностями λdt и μdt рождения или смерти для индивидуумов совокупности за время $(t, t + dt)$. Оценивается величина $\alpha = \exp((\lambda - \mu)\tau)$ с помощью случайной переменной $X_k = \sum_{i=1}^{k} N_i \Big/ \sum_{i=1}^{k-1} N_i$, где N_i — число индивидуумов совокупности в момент $i\tau$, $\tau > 0$ фиксировано. Оценка X_k — смещенная. Доказаны неравенства $E(X_k) < \alpha$, $E(\log X_k) < \log \alpha$. Смещение оценки и ее дисперсия малы при большом N_0. При $\mu = 0$ оценка X_k состоятельна, т. е. $\lim_{k\to\infty} E(X_k) = \alpha$, хотя, как показано, вообще это не имеет места. Вычислена дисперсия X_k (до порядка $1/N_0$) при большом N_0 и сравнивается с дисперсией оценки максимального правдоподобия для α, основанной на непрерывном наблюдении на $(0, t)$. А. П. Хусу

6543. Изучение статистик g и d. Лисерре (Un estudio de las estadisticas g y d. Liserre Guido O. G.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 91—95 (исп.)

6544. Изучение расслоенной случайной выборки. Аояма (A study of the stratified random sampling Aoyama Hirojiro), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1954, 6, 1—36 (англ.)

6545. Логика вывода в статистической теории. Сандрум (The logic of inference in statistical theory. Sundrum R. M.), J. Burma Res. Soc., 1954, 37, 82—89 (англ.)

6546. Оценка по методу минимума расстояния. Мацусита (On the estimation by the minimum distance method. Matusita Kameo), Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1954, 5, 59—65 (англ.)

6547. Рекуррентная формула при выборке из последовательных событий. Нарайн (On the recurrence formula in sampling on successive occasions. Narain R. D.), J. Indian Soc. Agric. Statistics, 1953, 5, 96—99 (англ.)

6548. Состоятельность и несмещенность непараметрических критериев. Де Мюнтер (Consistance et impartialité des tests non-paramétriques. De Munter Paul), Thèse. Univ. libre Bruxelles, 1954, 96 p. (франц.)

6549. Об элементарном выводе поправки Шеппарда и принципиальное замечание относительно последней. Гофман (Über eine elementare Herleitung der Sheppardschen Korrekturen und eine prinzipielle Bemerkung über die letzteren. Hofmann Ludwig), Statist. Vierteljschr., 1953, 6, 119—123 (нем.)

6550. Коллоквиум по математической статистике в Обервольфахе 4—10 марта 1956 г. Бирлейн (Kolloquium über mathematische Statistik in Oberwolfach vom 4. bis 10. März 1956. Bierlein Dietrich), Allgem. statist. Arch., 1956, 40, № 3, 272—274 (нем.)

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

6551. Математические аспекты теории расписаний. Белман (Mathematical aspects of scheduling theory. Bellman Richard), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, 4, № 3, 168—205 (англ.)

В первой части исследуется задача следующего типа: n объектов подвергаются последовательно k операциям обработки, порядок которых фиксирован. Требуется установить порядок прохождения объектами операций с целью минимизации полного времени обработки, если время обработки i-го объекта на j-операции равно a_{ij}. Для случая k=2, 3 приводятся результаты Джонсона (Johnson S., Optimal two- and three-stage production schedules with set-up times included, Naval Logistics Research Quarterly, March, 1954). Эта задача, а также ее аппроксимация случаем непрерывного множества объектов рассматривается на основе теории динамического программирования. Отмечается целесообразность рассмотрения задачи при случайной продолжительности обработки объекта на операциях. Указывается на связь с теорией очередей и с теорией игр (РЖМат, 1956, 4717, статья 1).

Во второй части рассматривается задача о перевозках.

Третья часть посвящена рассмотрению задач о сглаживании (т. е. о поддержании системы в заданном

состоянии с определенными потерями при отклонении от него), включающих как частные вопросы задачи о поставщике, о контроле и т. д.

В четвертой части указывается на приложения к вычислительной технике, а в пятой — к теории линейного программирования.

Шестая часть содержит обзор перспектив. Отмечается важность изучения экстремальных свойств функций на дискретных группах и других проблем «неклассического» вариационного исчисления, теории некоммутативных случайных процессов (см. реф. 6514), теории немарковских процессов и теории игр.

Н. Н. Воробьев

6552. Один класс мажоритарных игр. Исбелл (A class of majority games. Isbell J. R.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 27, 183—187 (англ.)

Мажоритарной игрой называется кооперативная игра n лиц, определяемая весами w_i, соотнесенными игрокам, и правилом: коалиция игроков S выигрывает в том и только том случае, когда ее вес $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ больше, чем вес ее дополнения S'. Изучаются мажоритарные игры с целочисленными весами.

Если каждый игрок есть пересечение двух множеств игроков, для каждого из которых

$$w(S) = w(S') + 1,$$

то веса w_i являются минимальными целыми весами, сохраняющими выигрывающие множества.

Веса однородны, если разность $w(S) - w(S')$ равна 1 (постоянна) для всех минимальных выигрывающих множеств S. Однородные веса минимальны. k-й по малости среди однородных весов не превосходит k-го числа Фибоначчи.

Рассмотрен класс C мажоритарных игр с n минимальными выигрывающими множествами. Для игр класса C каждое минимальое выигрывающее множество содержит 0, одного или всех игроков с весом 1. Каждый игрок веса 1 может участвовать только в двух минимальных выигрывающих множествах.

И. В. Романовский

6553. Аксиоматизация субъективной вероятности и выгоды для конечных множеств. Дейвидсон, Сапс (A finitistic axiomatization of subjective probability and utility. Davidson Donald, Suppes Patrick), Econometrica, 1956, 24, № 3, 264—275 (англ.)

Пусть P — упорядочение на конечном множестве K, F — множество событий E, M — отношение эквивалентности между парами элементов из K относительно E (эквивалентность записывается так: $x, y\ M(E)\ u, v$).

Приведена система аксиом, в которой по заданным P и M строится сохраняющая упорядочение функция пены $\varphi(x)$ (с точностью до линейного преобразования) и набор вероятностей $s(E)$ для событий E, причем, если $x, y\ M(E)\ u, v$, то $s(E)\varphi(x) + (1 - s(E))\varphi(y) = s(E)\varphi(u) + (1 - s(E))\varphi(v)$. И. В. Романовский

6554. Распределение многослойной выборки с помощью линейного программирования. Нурботтен (Allocation in stratified sampling by means of linear programming. Nordbotten Svein), Skand. aktuarietidskr., 1956, № 1—2, 1—6 (англ.)

Рассматриваются K совокупностей, их объем

$$X_k = \sum_i^H \sum_j^{N_i} x_{kij} \quad (k = 1, 2, \ldots, K),$$

где H — число слоев, N_i — число элементов в i-м слое, x_{kij} — значение j-го элемента k-й совокупности в i-м слое. X_k оцениваются по выборке с помощью

$$X'_k = \sum_i^H N_i \bar{X}'_{ki} = \sum_i^H N_i \sum_{j=1}^{n_i} x_{kij}/n_i,$$

где n_i — число элементов, извлеченных без возвращения из i-го слоя. Проведение оценки связано с некоторым платежом; рассматривается функция платежа специального вида $C = C_0 + \sum b_i n_i^{-1}$, где b_i — неположительные параметры.

Требуется оценить X_k с наименьшими затратами и с соблюдением условий $0 \leqslant n_i \leqslant N_i$ $(i = 1, 2, \ldots, H)$; дисперсия X'_k не превосходит наперед заданных величин v_k, т. е.

$$\sum_i^H N_i (N_i - n_i) S_{ki}^2 n_i^{-1} \leqslant v_k \quad (k = 1, 2, \ldots, K),$$

где $S_{ki}^2 = \sum_j^{N_i} (x_{kij} - \bar{X}_{ki})^2/(N_i - 1)$, $i = 1, 2, \ldots, H$;

$k = 1, 2, \ldots, K$. Так как полученная задача состоит в отыскании максимальной линейной функции при линейных ограничениях, то это есть задача линейного программирования. И. Л. Канторович

6555. Распределение самолетов по линиям — пример линейного программирования при неустойчивом спросе. Фергусон, Данциг (The allocation of aircraft to routes — an example of linear programming under uncertain demand. Ferguson Allen R., Dantzig George B.), Manag. Sci., 1956, 3, № 1, 45—73 (англ.)

Цель статьи — проиллюстрировать приложение линейного программирования к задаче о распределении самолетов по линиям, максимизирующем ожидаемую прибыль, когда потребительский спрос неустойчив.

Из резюме авторов

6556. Искусственное управление медленным оборотом. Хейварт Гурт (Inventory management of slow-moving parts. Heyvaert A. C., Hurt A.), Operat. Res., 1956, 4, № 5, 572—580 (англ.)

Решается задача об определении оптимального уровня запасов при устойчивом и длительном периоде восполнения, когда спрос распределен по закону Пуассона. Оптимальный уровень определяется из условий минимизации некоторой функции убытка и максимизации отношения среднего удовлетворенных спросов к среднему поступивших спросов в единицах продукции. Предлагаются графические способы решения. Н. М. Митрофанова

6557. Об одной заметке Хатанака, посвященной консолидации. Мак-Манус (On Hatanaka's note on consolidation. McManus M.), Econometrica, 1956, 24, № 4, 482—487 (англ.)

Автор показывает ошибочность критерия приемлемости консолидации внутри некоторой системы, предложенного Хатанаки (Hatanaka M., Econometrica, 1952), и приводит точный критерий, а также необходимые и достаточные условия приемлемости.

Н. М. Митрофанова

6558. Выбор капитального оборудования в условиях неопределенности сроков поставки. Айзак (Note on selection of capital equipment with uncertain delivery date. Isaac E. J.), Operat. Res., 1956, 4, № 3, 354—357 (англ.)

Рассматривается задача, сочетающая элементы линейного программирования и теории игр. Заказ на оборудование может быть размещен у двух поставщиков. Поставщик A представляет оборудование в требуемый срок, но оно недостаточно удовлетворительно. Поставщик более совершенного оборудования B в данный момент не знает, выполнит ли он заказ в срок или запоздает, или даже совсем его не выполнит (вероятности этих случаев неизвестны). Для решения задачи подсчитываются все прибыли и убытки заказчика, которые могут последовать в каждом из указан-

ных случаев, при выборе какой-либо одной из следующих трех стратегий: дать заказ B, выждать определенное время, дать заказ A (и расторгнуть его, если выяснится, что B сможет поставить оборудование в приемлемый срок). Задача решается элементарным методом попарного сравнения стратегий с составлением простых линейных соотношений для определения соответствующих вероятностей в неравенствах. Например, по условиям задачи выясняется, что вероятность выполнения заказа B в срок должна быть не менее 0,5, чтобы передача ему заказа была более выгодна, чем передача заказа A. А. А. Конюс

6559 К. Теория игр и линейное программирование. Вайда (The theory of games and linear programming. Vajda Steven. London, Methuen, New York, Wiley, 1956, 106 pp., ill. 8 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 332, 11 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

6560. Метод индивидуальных значений. Романовский В. И., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 5—21

Статья содержит критику приема статистического текущего контроля, предложенного Л. И. Брагинским и известного под названием метода «индивидуальных значений». Отмечая плодотворность идеи, лежащей в основе метода и заключающейся в том, чтобы по расположению отдельных членов выборки в поле допуска судить с определенной вероятностью о правильной или неправильной работе станка, автор указывает на теоретическую несостоятельность ряда рекомендаций Л. И. Брагинского, в частности, на ошибочный вывод пределов вариации для членов упорядоченной выборки. Указываются возможные коррективы для методики контроля. Н. В. Смирнов

6561. Вероятностная теория водохранилищ с непрерывным расходованием. Моран (A probability theory of a dam with a continuous release. Moran P. A. P.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 26, 130—137 (англ.)

Так же, как и в предшествующих работах (РЖМат, 1956, 9001; 1957, 4268), автор исследует стационарное распределение количества воды в водохранилище. В очень частных предположениях анализируется случай непрерывного стока и времени потребления. Н. В. Смирнов

6562. Аналитическое изучение некоторых временных рядов. Маргаритис (Analytical study of some time series. Margaritis E. D.), Спудэ икономикэ, киниикэ техникэ, 1956, 6, № 7—8, 105—137 (греч.)

На примерах, взятых из экономической статистики, показываются приемы обработки временных рядов с целью выделения их уровней («трендов») различного вида (прямолинейных, параболических, показательных и т. п.). Н. В. Смирнов

6563. О теории случайных связей. Беннетт (On the theory of random mating. Bennett J. H.), Ann. Eugenics, 1954, 18, 311—317 (англ.)

6564. К вопросу применения теоремы о среднем к математической проблеме страхования. Мейделль (Beitrag zur Anwendung des Mittelwertsatzes auf versicherungsmathematische Probleme. Meidell Birger), B. l. Dtsch. Ges. Versicherungsmath, 1954, 2, № 1, 97—117 (нем.)

6565. Вероятность трансвариации в правильных гауссовых распределениях. Стериотис (Probability of transvariation in the regular distributions of Gauss. Steriotis P. J.), Bull. Soc. Math. Grèce, 1954, 28, 1—36 (англ.)

6566. Оценка параметров функций Энгеля. Фрер (L'estimation des paramètres des fonctions d'Engel. Freire Rémy), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1953, 2, № 3, 19—26 (франц.)

6567. Вероятность в социальных науках. Маршак (Probability in the social sciences. Marschak Jacob), Math. thinking social sci., pp. 166—215, 423—427. The Free Press, Glencoe, Ill., 1954. $ 10.00 (англ.)

6568. Последовательный отбор при инспекции имущества. Сторх (Sequential sampling in the inspection of goods. Storch J. M.), Statistica, Rijswijk. 1953, 7, 3—14 (нем.; рез. англ.)

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 332.

6569. Статистика и эконометрика. Алькайде-Инчаусти (El estadístico y la econometria. Alcaide Inchausti Angel), Bol. estadist., 1956, 16, Suppl. № 8, 53—59 (исп.)

6570. Пропорциональный профиль и скрытая структура. Гибсон (Proportional profiles and latent structure. Gibson W. A.), Psychometrika, 1956, 21, № 2, 135—144 (англ.)

6571 К. Избранные работы о шумах и стохастических процессах. (Selected papers on noise and stochastic processes.), Dover Publications, Inc., New York, 1954, 337 pp. Cloth 3.50 doll.; paper 2.00 doll (англ.)

6572 К. Теория вероятностей и математическая и техническая статистика. Т. 1. Дунин-Барковский, Смирнов (Teoria probabilităţilor şi statistica matematică în tehnică. Part. generală. Vol. 1. Dunin-Barkovski I. V., Smirnov N. V. Inst. studii romîno-soviet. Acad. R. P. R., Bucuresti, 1956, 289 p., il. — Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А, № 10, 387 (рум.)

6573 К. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Общая часть. Т. 2. Дунин-Барковский, Смирнов (Teoriea probabilităţilor şi statistica matematică în tehnica. Part. generală. Vol. 2. Dunin-Barkovski I. V., Smirnov N. V. Acad. R. P. R. Inst. studii romîno-sov., Bucureşti, 1956, 605 p., il., 20 lei. — Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А, № 15, 567 (рум.) Т. 1 см. реф. 6572 К

См. также: 6412, 6462 Д

ГЕОМЕТРИЯ

6574. Построение плоскостной модели n-мерного евклидова пространства. Мчедлишвили Е., Тр. Тбилисск. ун-та, 1956, 60, 53—70 (рез. груз.)

Рассматривается декартова прямоугольная система координат в пространстве, координатный трехгранник которой на основании теоремы Польке может быть спроектирован в любые три выходящие из одной точки отрезка на плоскости. Указывается задание точки, прямой, плоскости в прямоугольной декартовой системе координат. Все обобщается на n-мерное пространство. В. А. Маневич

6575. Об одной конфигурации из точек и сфер в четырехмерном пространстве. Браун (A configuration of points and spheres in fourdimensional space. Brown L. M.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1954—1955, A64, № 2, 145—149 (англ.)

Развивая результат Грейса (Grace J. H., Trans. Cambridge Philos. Soc., 1898, 16, 181), автор приходит к конфигурации из 576 точек и 56 (трехмерных) сфер в четырехмерном пространстве. На каждой сфере лежит 72 точки и через каждую точку проходит 7 сфер. Применен элементарный метод. З. Д. Гордевский

6576. **О доказательствах некоторых теорем векторной алгебры. Янекоски** (Прилог доказима неких ставова векторске алгебре. Јанекоски Виктор), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 1—2, 65—72 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Дается оригинальное доказательство известных теорем векторной алгебры. Из резюме автора

6577. **Как я излагаю тему: «Метрические связи между отрезками в прямоугольном треугольнике». Скудзинский** (Jak sobie poradziłem przy realizacji tematu «Związki miarowe między odcinkami w trójkącie prostokątnym». Skudziński Marian), Matematyka, 1957, 10, № 1, 24—26 (польск.)

6578. **Как преодолеть затруднения учеников при составлении пропорций сторон в подобных треугольниках. Крыговская** (Jak pokonać trudności uczniów w poprawnym układaniu proporcyj boków w trójkątach podobnych. Krygowska Zofia), Matematyka, 1957, 10, № 1, 26—27 (польск.)

6579 К. **Геометрические преобразования. I. Движения и преобразования подобия. Яглом И. М.** М., Гостехиздат, 1955, 282 стр., илл., 5 р. 45 к.

При решении различных геометрических задач очень часто видоизменяют рассматриваемую фигуру, переходя от одной фигуры к другой. Такие переходы от одной фигуры к другой называются преобразованием этих фигур. Каждое преобразование геометрической фигуры влечет за собой потерю некоторых ее свойств и приобретение новых свойств. Неизменность (инвариантность) некоторых геометрических свойств при определенном преобразовании служит надежным средством их классификации.

Геометрические преобразования, являясь одним из основных вопросов современной геометрии, оживляют материал школьного преподавания. Автор основной своей задачей поставил раскрытие идеи теоретико-группового обоснования геометрии на базе материала элементарной геометрии. В первом томе монографии он разбирает только преобразования движения и подобия. Материал изложен живо и увлекательно, большое число решенных задач облегчает чтение книги и делает ее вполне доступной широкому кругу читателей — студентам педагогических институтов, учителям средних школ, а также наиболее способным и любознательным учащимся. М. П. Черняев

6580 К. **Геометрия плоскости и тригонометрия для морских училищ. 4-е изд. Несс** (Plan geometri og trigonometri for sjømannsskoler. 4. utg. Naess Almar. Grøndahl, Grøndahl & søn., 1956, IX, 123 s., ill., 12,00 kr.), Norsk bokfortegnelse, 1956, № 2, 20 (норв.)

6581 К. **Сборник задач по аналитической геометрии.** (Culegere de probleme de geometrie analitică. Ministerul Învățămîntului. București, 1955 (1956), 93 p.,3,70 lei), Bul. bibliogr., 1956 ,A, № 24, 925 (рум.)

6582 К. **Справочник по аналитической геометрии. Проективная плоскость, аффинная плоскость, евклидова плоскость. Либуа** (Formulaire de géométrie analytique. Plan projectif, plan affin, plan euclidien. Libois Paul. Bruxelles. Ed. Rev. École polytechn. et Libr. Castaigne, 1956, 38 f., 30 fr.), Bibliogr. Belgique, 1956, 82, № 11, 221 (франц.)

6583 К. **Тензорное исчисление. Голомб** (Rachunek tensorowy. Gołąb Stanisław. Warszawa, PWN, 1956, 309 s., il., 30.70 zł.) (польск.)

Книга представляет собой учебник по тензорному исчислению. Она рассчитана не только на студентов-математиков, но и на инженеров и физиков. Как указывает автор в предисловии, основное внимание уделено строгому введению основных понятий. Выполнена эта задача с педагогическим мастерством, популярно и не формально. При сравнительно небольшом объеме книги, она по содержанию теоретического материала превосходит обычные учебники. Так, например, рассматриваются неголономные системы и объекты неголономности, параллельный перенос тензорных плотностей, объекты Пензова. Даны лишь геометрические приложения: теория линий и поверхностей в многомерных пространствах.

Книга состоит из трех частей: тензорная алгебра, тензорный анализ и приложения тензорного исчисления.

Часть 1, кроме «вводных понятий», содержит 3 главы. Геометрические объекты; Аффиноры; Дополнения к алгебре аффиноров.

В части 2 рассматриваются параллельное перенесение, тензоры кривизны и кручения, метрика пространства, некоторые специальные пространства, дифференциальные операторы и интегральные теоремы.

Часть 3 посвящена приложению тензорного исчисления к геометрии.

Имеется указатель основных символов и обозначений, библиография и предметный указатель. Выводы, не вошедшие в другие работы, выделены автором; в основном они носят методический характер.

А. И. Нахимовская

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6584. **Систематизация пифагоровых треугольников по радиусам вписанных и вневписанных окружностей. Петерс** (Eine Systematisierung der pythagoreischen Dreiecke nach ihren In-und Ankreisradien. Peters A.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 3, 125—127 (нем.)

Показано, как разыскать все пифагоровы треугольники (прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами a, b, c), имеющие вписанную окружность заданного радиуса ρ.

В пифагоровых треугольниках полупериметр s, а потому и радиус вписанной окружности $\rho = s - c$, выражается целым числом. Введя целочисленный параметр $k_1 = c - b$, автор выражает стороны прямоугольного треугольника через параметры ρ и k_1: $a = 2\rho + k_1$, $b = 2\rho + \frac{2\rho^2}{k_1}$, $c = 2\rho + k_1 + \frac{2\rho^2}{k_1}$; если $2\rho^2$ делится на k_1, то треугольник пифагоров.

1. Пифагоровых треугольников с вписанной окружностью радиуса ρ существует столько, сколько делителей имеет $2\rho^2$. Учитываются и те треугольники, которые получаются один из другого заменой a на b.

2. Пифагоров треугольник с вписанной окружностью радиуса ρ подобен пифагорову треугольнику с вписанной окружностью меньшего радиуса тогда и только тогда, когда соответствующие значения k_1 и k_2 не взаимно просты.

3. Если μ есть число различных простых делителей числа 2ρ, то существует 2^μ пифагоровых треугольников с вписанной окружностью радиуса ρ, которые не подобны пифагорову треугольнику с вписанной окружностью меньшего радиуса. А. М. Комиссарук

6585. **Одна теорема элементарной планиметрии. Велдкамп** (Een stelling uit de elementaire meetkunde van het platte vlak. Veldkamp G. R.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1956—1957, 44, № 1, 1—4 (гол.)

Автор дает новое, конструктивное доказательство теоремы Д. Помпейу (Pompeïu D., Elem. Math., 1953, 8, 13): Пусть a, b, c суть расстояния точки P до вершин равностороннего треугольника. Тогда существует треугольник со сторонами a, b, c, причем он вырождается тогда и только тогда, когда P лежит на окружности, описанной около треугольника.

Исследуется вопрос: при каком положении точки P соответствующий треугольник будет остро-, прямо- или тупоугольным. Доказательство просто, изящно и коротко: все построение сводится к вращению точки P вокруг одной из вершин на угол $\pi/3$. Затем устанавливается лемма: если расстояние a от вершины A наибольшее ($a > b$, $a > c$), то точка P лежит внутри угла между биссектрисами углов B и C.

Отразим зеркально исходный треугольник в каждой стороне. Получим образы вершин A_1, B_1 и C_1. Проведем три окружности с центрами в этих точках через соответствующую пару остальных вершин. Если P вне этих кругов, — треугольник остроугольный, если на одной из окружностей, — прямоугольный, внутри одного из кругов, — тупоугольный.

Формулируется без доказательства теорема: Отвлекаясь от особых случаев, по данному треугольнику найдется шесть точек таких, что связанный с ними треугольник подобен данному.

Если P взята вне плоскости треугольника, то, проектируя ее на плоскость, простым вычислением находим, что треугольник со сторонами, равными расстояниям до вершин, существует всегда. Этот треугольник остро-, прямо- или тупоугольный в зависимости от того, лежит ли точка вне, на или внутри сфер, для которых большими кругами являются упомянутые выше круги.

Р. И. Пименов

6586. Семейство треугольников. Лоран (Une famille de triangles. Lorent H.), Bull. Soc. roy sci. Liège, 1955, 24, № 1, 14—24 (франц.)

Изучаются возможные обобщения следующей задачи: На плоскости в прямоугольной системе координат XOY даны точки P и H. Найти точки $Q \in OX$ и $R \in OY$ такие, чтобы точка H была ортоцентром треугольника PQR. Например, если P описывает прямую

$$X/g + Y/h = 1 \qquad (1)$$

то H описывает коническое сечение

$$gx(ax - by - a^2) + hy(by - ax - b^2) = \\ = gh(bx + ay - ab) \qquad (2)$$

где $Q \equiv (a, 0)$, $R \equiv (0, b)$. Если (2) — гипербола, то одна ее асимптота параллельна QR, а другая — прямая (1). Если прямая (1) параллельна QR, то (2) — парабола с диаметрами, параллельными QR.

В. Т. Базылев

6587. Степень точки относительно кривой. Невилл (The power of a point for a curve. Neville E. H.), Math. Gaz., 1956, 40, № 331, 11—14 (англ.)

Если $\varphi(x, y) = C_0x^n + C_1x^{n-1}y + C_2x^{n-2}y^2 + \ldots$ — совокупность старших членов левой части уравнения алгебраической кривой $f(x, y) = 0$, то $M(f) = A^2 + B^2$, где

$$A = C_0 - C_2 + C_4 - \ldots, \quad B = C_1 - C_3 + C_5 - \ldots,$$

называется нормальной мерой многочлена $f(x, y)$.

Значение $\frac{1}{\sqrt{M(f)}} f(x_1, y_1)$ называется степенью точки (x_1, y_1) относительно кривой $f(x, y) = 0$ и получает в работе геометрическое истолкование.

В. И. Шуликовский

6588. О построении точек пересечения трех поверхностей второго порядка. Ленц (Über die Konstruierbarkeit der Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung. Lenz Hanfried), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1955, München, 1956, 45—51 (нем.)

Пусть три линейно независимые поверхности 2-го порядка заданы уравнениями в однородных координатах:

$$\sum a_{ik}x_ix_k = 0, \quad \sum b_{ik}x_ix_k = 0, \quad \sum c_{ik}x_ix_k = 0, \qquad (1)$$

где суммирование производится по i, $k = 0, 1, 2, 3$.

Составим определитель: $\Delta \equiv |\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik}|$. Уравнение

$$\Delta = 0 \qquad (2)$$

определяет в проективной (λ, μ, ν)-плоскости кривую 4-го порядка.

Доказаны теоремы:

1. Все точки пересечения поверхностей (1) находятся построением 3-й степени тогда и только тогда, когда степень поля, порождаемого координатами всех точек пересечения, не делится ни на 5 ни на 7.

2. Если из конечного числа точек пересечения поверхностей (1) четыре различные лежат в одной плоскости, то все точки пересечения находятся построением 3-й степени.

3. Если число точек пересечения поверхностей (1) конечно, и кривая (2) имеет одну особую точку, то либо одну точку пересечения можно построить только линейкой, либо все точки пересечения находятся построением 3-й степени.

4. Если поверхности (1) имеют в точности восемь различных точек пересечения, и кривая (2) имеет одну особую точку, то восемь точек пересечения расположены в двух плоскостях и находятся построением 3-й степени.

5. Если поверхности (1) имеют в точности восемь различных точек пересечения, и кривая (2) имеет две особые точки, то все восемь точек пересечения находятся построением 2-й степени, следовательно, действительные из них можно построить циркулем и линейкой.

А. С. Смогоржевский

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

6589. Приложение методов обобщенной метрической геометрии к теоретической механике. Рунд (Application des méthodes de la géométrie métrique généralisée à la dynamique théorique. Rund Hanno), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 41—51 (франц.)

Следуя идеям Риччи и Леви—Чевита, Синг провел систематическое построение аналитической динамики, исходя из чисто геометрической точки зрения (Синг, Тензорные методы в динамике, М., 1947). Однако эта теория не охватывает всех возможных случаев динамических систем.

Дается обзор результатов более общей теории, которая была построена Дираком, Картаном, Лихнеровичем и автором. В этой теории время рассматривается просто как добавочная степень свободы. Тогда однородная функция Лагранжа L может быть всегда определена так, что она допускает геометрическую интерпретацию в терминах геометрии Финслера. Исследования автора базируются на вариационном принципе.

Указывается, что эта теория может быть приложена также к релятивистской и квантовой динамике.

М. А. Акивис

6590. К геометрии гармонического вращательно-колебательного движения. Каутный (Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Kautny Walter), Monatsh. Math., 1956, 60, № 1, 66—82 (нем.)

Гармоническим вращательно-колебательным движением называется сложное движение, состоящее из вращения вокруг постоянной оси и одновременно гармонического колебания параллельно этой оси. Если σ — угол поворота, z — ось вращения, то траектория точки $(a, 0, 0)$ в рассматриваемом движении определяется уравнением

$$x = a\cos\sigma,\ y = a\sin\sigma,\ z = h\sin n\sigma, \qquad (1)$$

где h — амплитуда, n — частота колебания. Кривая (1) лежит на круглом цилиндре Δ радиуса a и может быть названа цилиндрической синусоидой. При $n = 1$ получается известный случай Мангейма—Дарбу. Автор изучает случаи при $n \neq 1$.

Строится направляющая квадрика Λ, которой касаются все касательные кривой (1). Для каждого значения σ касательная T к (1) при вращении вокруг оси z образует гиперболоид вращения, огибающей этих гиперболоидов и является Λ: $(x^2+y^2)/a^2 - z^2/n^2h^2 = (n^2-1)/n^2$.

Соприкасающаяся плоскость кривой (1) является касательной плоскостью поверхности Λ.

Центральная коллинеация $x^* = bx/z$, $y^* = by/z$, $z^* = b^2/z$ при $b^2 = (1-n^2)\,a^2/n^2$ $(n<1)$ преобразует Λ в шар Λ^*, Δ в конус Δ^* и кривую (1) в геодезическую k^* на Δ^*.

Линия касания l^* линейчатой поверхности, образованной касательными k^*, с шаром Λ^* есть линия откоса, следовательно, линия касания l поверхности касательных T с Λ имеет центральной проекцией из начала на плоскость $z = \text{const}$ эпициклоиду.

Гармоническое колебательно-вращательное движение плоскости ε образует семейство плоскостей с огибающей, ребром возврата которой является линия откоса, лежащая на поверхности 2-го порядка: эллипсоиде для $n<1$ и однополостном гиперболоиде для $n>1$. Горизонтальной проекцией ребра возврата — эпициклоида при $n>1$ и гипоциклоида при $n>1$.

Рассматриваются вопросы построения огибающей и ребра возврата, используя свойство касательных последнего иметь постоянный угол с xy.

На основании кинематических свойств образующей огибающей поверхности автор дает более простое доказательство известной теоремы Бляшке: если на некоторой квадрике вращения с вертикальной осью имеется линия откоса l, то плоскость, жестко связанная с подвижным трехгранником кривой l, огибает поверхность, ребро возврата которой есть соосная и подобного же рода линия откоса.

В заключение исследуются алгебраические огибающие поверхности $(n = \lambda/\mu)$ и определяются их класс, равный $2\max(\lambda, \mu)$, и порядок, равный $2(\lambda+\mu)$.

В. С. Люкшин

6591. К теории механизмов для образования кривых второго порядка. Артоболевский И. И., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1957, № 2, 85—90

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6592. Объединенная теория трех видов общих бинарных комплексных элементов в чисто синтетической проективной геометрии. Такасу (A unified theory of the three kinds of the general binary complex elements in the purely synthetic projective geometry. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1954, 11, № 2, 137—144 (англ.)

В данной работе автор повторяет ранее рассмотренные им положения (РЖМат, 1957, 4296) и показывает, что комплексные числа можно рассматривать как двойные элементы инволюций. Далее приводятся шесть постулатов, которые требуются автору для развития своей теории. В. А. Маневич

6593. Инфинитезимальная классификация кривых второго порядка на плоскости Лобачевского. Ходова Р. Н., Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1956, 10, 45—54

Две кривые плоскости Лобачевского называются инфинитезимально изотопными, если существует взаимно однозначное и в обе стороны взаимно непрерывное отображение плоскости Лобачевского в себя, при котором рассматриваемые кривые переходят друг в друга. Если отображение в обе стороны удовлетворяет еще условию Липшица, то кривые сильно изотопны.

Кривые второго порядка на плоскости Лобачевского разбиваются на восемь инфинитезимально-изотопических классов: 1) выпуклая гипербола и вогнутая гипербола; 2) полугиперболическая парабола; 3) эквидистанта; 4) полугипербола, выпуклая гиперболическая парабола, вогнутая гиперболическая парабола; 5) эллиптическая парабола; 6) соприкасающаяся парабола; 7) эллипс и окружность; 8) предельная линия.

Классификация относительно сильной изотопии совпадает с инфинитезимально-изотопической классификацией. А. М. Левинов

6594. Поляритет относительно тройки точек. До (Polarité dans un terne de points. Deaux R.), Mathesis, 1955, 64, № 3—5, 87—93 (франц.)

Кубическая форма $P(z, u)$, где z, u — однородные координаты комплексной плоскости, определяет тройку точек ABC. Первая поляра $z_1\dfrac{\partial P}{\partial z} + u_1\dfrac{\partial P}{\partial u} = 0$ определяет пару точек, полярную относительно полюса (z_1, u_1). Вторая поляра $z\dfrac{\partial P}{\partial z_1} + u\dfrac{\partial P}{\partial u_1} = 0$ определяет полярную точку. Последняя вместе с полюсом гармонически разделяет полярную пару. Когда полюс удаляется на бесконечность, полярная пара совпадает с фокусами эллипса Штейнера, вписанного в треугольник ABC. Полярные пары образуют инволюцию, двойными точками которой служат нули гессиана формы $P(z, u)$. Я. П. Бланк

6595. Некоторые замечания относительно статьи Д. З. Гордевского «Многомерные аналоги гиперболоида». Солнцева Т. В., Успехи матем. наук., 1956, 11, № 3, 175—176

В замечаниях перечислены некоторые малосущественные ошибки Гордевского (РЖМат, 1957, 788). Справедливо отмечено неправильное употребление термина «попарно не пересекающиеся пространства», там, где должно быть «независимые пространства». Среди утверждений теоремы 4 указано одно ошибочное, эта ошибка затем повторяется в следствиях из теоремы. Доказав ошибочность соответствующего места, автор, однако, не предлагает своих поправок, устраняющих ошибку. Далее ставится в упрек Гордевскому его незнакомство с руководствами Бертини и Сегре по многомерной геометрии, в которых содержится теорема, частными случаями которой являются теоремы Гордевского. Приводится мнение Бертини и Сегре, что действительным аналогом гиперболоида следует рассматривать гиперболоиды $(1, m)$ в символике Гордевского, т. е. имеющие семейство прямолинейных и семейство m-мерных образующих. О. А. Кожий

6596. Новая синтетическая теория кубической полярной системы А. Н. Власова. Солнцева Т. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1956, 39, 115—125

Устанавливается [1,3]-значное соответствие между точками плоскостей α и α' посредством коллинеарного соответствия между прямыми (сеть Σ) плоскости α и кривыми сети Σ' конических сечений с одной базисной точкой M' плоскости α'. Распавшиеся кривые 2-го порядка сети Σ' образуют два проективных пучка $|M'|\wedge|n|_2$, где $|n|_2$ — пучок 2-го порядка, лучи которого огибают кривую a^2, не принадлежащую Σ'. Поэтому каждой точке плоскости α соответствуют три точки плоскости α', являющиеся вершинами треугольника, описанного около a^2. В [1,3]-значном соответствии точке M' соответствуют все точки прямой $m \subset \alpha$. Показано, что сеть Σ' вполне определяется точкой M', кривой a^2 и одним распавшимся коническим сечением из Σ'. Точки прикосновения к a^2 сторон треугольников, соответствующих точкам плоскости α в [1,3]-значном соответствии, образуют инволюцию I_3^2. Рассматриваются известные основные свойства инволюции I_3^2. Доказывается, что инволюция I_3^2 с корнями N_1', N_2', N_3' тождественна кубической полярной системе А. Власова, имеющей те же корни. Показано, что совокупность прямых плоскости α, соответствующих в коллинеации распавшимся коническим сечениям сети Σ', огибает уникурсальную кривую C_4 третьего класса четвертого порядка. Рассматривается инволюция I_4^2, высекаемая на C_4 сетью Σ. В. А. Маневич

6597. Понятие контура и его определение. Талеперовский А. М., Сб. науч.-исслед. работ Ивановск. текстильн. ин-та, 1955, № 7, 142—148

Ссылаясь на неточные определения контура, проектирующегося в очерк проекции геометрического тела (пособия В. Гордона и М. Семенцева-Огиевского, Н. А. Рынина), автор относит к контуру только видимые точки линии соприкасания лучевой поверхности и дает два весьма пространные определения, не уточняющие контур как замкнутый непрерывный ряд точек. Введены понятия горизонтального, фронтального, профильного контуров и пояснены на простейшем примере.

Примечание референта. Аналогичная трактовка контура имеется в пособиях О. А. Вольберга — Лекции по начертательной геометрии, 1947, 179; Н. А. Попова — Курс начертательной геометрии, 1947, 208; А. И. Островского — Начертательная геометрия в популярном изложении, 1953, 71.

Л. Н. Лихачев

6598 К. Сборник задач по начертательной геометрии. Том I. Методы. Точка, прямая, плоскость. Мишкулеску, Никоарэ (Culegere de probleme de geometrie descriptivă. Vol. 1. Punct, dreaptă, plan, metode. Mişculecsu D., Nicoara G. Inst. politehn, Bucureşti, 1956, 246 p., 13 lei. — Litogr.). Bul. bibliogr., 1956, А, № 24, 926 (рум.)

6599 К. Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. Ч. 2. Интерпретации геометрии Лобачевского и развитие ее идей. Каган В. Ф., М., Гостехиздат, 1956, 344 стр., илл. Прил.: Розенфельд Б. А. Гиперболическая плоскость как сфера мнимого радиуса; Новые исследования по предистории неевклидовой геометрии. 15 р.

Вторая часть одноименного труда В. Ф. Кагана (Гостехиздат, 1949), составленная по материалам, сохранившимся после смерти автора.

В гл. XI излагаются основные факты геометрии поверхностей постоянной кривизны и доказываются теоремы о локальной осуществимости плоскости Лобачевского и ее неосуществимости в целом на поверхности постоянной кривизны евклидова пространства.

Следующие главы посвящены эрлангенской программе Клейна и его проективной интерпретации плоскости Лобачевского с приложением к теории кривых второго порядка геометрии Лобачевского; затем освещаются понятия проективной метрики Кэли и взгляды Гельмгольца на обоснования геометрии; проводится аналитическое построение геометрии эллиптического пространства и конформная интерпретация Пуанкаре плоскости Лобачевского.

Основным содержанием последней главы является построение и исследование системы аксиом, характеризующих геометрию прямой евклидова пространства, которая не опирается на допущение существования точек вне этой прямой. Автор разбивает все аксиомы на четыре группы: расположения или порядка, структуры, конгруэнтности и непрерывности.

Аксиомы первых двух групп отличаются от соответствующих аксиом Гильберта тем, что аксиома Паша заменяется тремя аксиомами линейного характера.

Первые три аксиомы конгруэнтности говорят о рефлексивности, симметрии и транзитивности отношения конгруэнтности для отрезков. Далее следуют аксиомы: III_4. Если отрезки OA и OB одного луча конгруэнтны, то точки A и B совпадают.

$III_{5,6}$. Каковы бы ни были отрезок AB и точка O, на луче OC, сонаправленном с AB, существует такая точка C, что $OC \equiv AB$, и такая точка D на луче, противонаправленном с AB, что $DO \equiv AB$. За аксиомы непрерывности принимаются аксиомы Архимеда и Кантора.

В приложениях, составленных Б. А. Розенфельдом, излагается интерпретация Пуанкаре плоскости Лобачевского на двухполостном гиперболоиде и дается обзор высказываний Аристотеля и работ Омара Хайама и Насирэддина ат-Туси по теории параллельных.

А. П. Норден

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6600. О поверхности пар точек кривой 5-го порядка Снайдера. Годо (Sur la surface de couples des points de la quintique de Snyder. Godeaux Lucien), Bull. el. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 11, 1258—1263 (франц.)

Кривая 5-го порядка Снайдера, изображаемая уравнением

$$a_1x_1^4x_2 + a_2x_2^4x_3 + a_3x_3^4x_1 = 0, \qquad (1)$$

преобразуется в себя гомографией

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{\varepsilon x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon^{10}x_3}, \qquad (1)$$

где ε — первообразный корень степени, равной 13, из единицы. Эта гомография дает на кривой L инволюцию γ порядка, равного 13, имеющую три двойных точки, именно вершины O_1, O_2, O_3 координатного треугольника.

Пусть F будет поверхность, изображающая пары точек кривой L (Severi F., Atti Accad. Torino, 1903, 38, 185—200). Если точка P изображает пару точек P_1, P_2 кривой L, а гомография (1) дает им соответствующие точки P_1', P_2', то точке P будем считать соответствующей на F ту точку P', которая изображает пару P_1', P_2'. Таким образом определяется бирациональное преобразование F в себя и на F это определяет инволюцию J порядка 13, имеющую шесть двой-

ных точек: O_{11}, O_{22}, O_{33}, которые представляют сдвоенные вершины O_1, O_2, O_3, и O_{23}, O_{31}, O_{12}, которые представляют соответственно пары O_2 и O_3, O_3 и O_1, O_1 и O_2. Автор доказывает, что эта инволюция рациональная, подробным исследованием поверхности Ф, являющейся образом инволюции J. Поверхность Ф имеет изолированные точки дирамации, она не имеет канонической кривой и ее геометрический жанр $p_g=0$, она не имеет и биканонической кривой, следовательно $P_2=0$, наконец, ее арифметический жанр $p_a=0$. Из двух последних свойств по теореме Кастельнуово вытекает, что Ф рациональна. С. С. Бюшгенс

6601. О поверхности пар точек кривой 5-го порядка Снайдера (вторая заметка). Годо (Sur la surface des couples de points de la quintique de Snyder (Seconde note). Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 1, 8—10 (франц.)

На основе рассмотрения поведения канонических и биканонических кривых в точках дирамации показывается, что на поверхности — образе инволюции 13-го порядка, принадлежащей поверхности, изображающей пары точек квинтики Снайдера, таких кривых не существует, т. е. ее геометрический жанр и бижанр — нули и она рациональна (реф. 6600). В. В. Морозов

6602. Полные линейные ряды на пространственной кривой, представляющей полное пересечение двух поверхностей и имеющей кратные точки. Маркионна (Serie lineari complete su una curva gobba dotata di punti multipli ed intersezione totale di due superficie. Marchionna Ermanno), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1953, 86, № 1, 184—222 (итал.)

Обобщая теорему Севери о полноте рядов, высекаемых общей формой на неособенной кривой — полном пересечении $d-1$ прималей в R_d, автор исследует условия, при которых то же свойство справедливо для кривой с особенностями. Изучаются случаи: 1) кривой Г в S_3 — полного пересечения поверхностей A и B порядков m и n с кратностями h и k в O (причем касательные конусы этих поверхностей в O не имеют общих частей — так называемый простой случай), а в остальном — производящих; 2) кривой Г в S_3, представляющей полное пересечение двух поверхностей и имеющей только двойные точки и 3) обобщение случая 1) на пространство произвольной размерности.

В первом случае, если F_l^i — поверхность порядка l с кратностью i в O, то указывается значение $i=i_0$, при котором на Г высекается полный ряд; это значение минимально в том смысле, что при $i<i_0$ соответствующий ряд уже не полон; при $i>i_0$ вопрос остается открытым, но даются некоторые критерии, достаточные (а иногда и необходимые) для его полноты; указывается индуктивный «критерий полноты» — условие, достаточное для полноты ряда, высекаемого F_l^{q+1}, если ряд, высекаемый F_l^q, — полный. Кроме того, дан метод вычисления размерности полного ряда, соответствующего поверхности F_l^i $(i>i_0)$. Результаты применены к 1) нахождению необходимых и достаточных условий нормальности Г; 2) нахождению простейших поверхностей, высекающих на Г канонический ряд (поверхность порядка $m+n-4$ с кратностью $h+k-3$ в O и касательный конус которой в O содержит касательные к Г в той же точке).

Основной инструмент исследования — следующее обобщение теоремы Кенига: пусть в S_3 даны три поверхности A, B, C порядков m, n, l и с кратностями в O, h, k, s соответственно, представляющие в O простой случай, а вне O пересекающиеся в конечном числе простых точек P, и пусть Ф — поверхность порядка l, проходящая через O с кратностью q и через точки P с кратностями 1; если $L-q+1=(m+n+l)-(h+k+s)$, то $\Phi=F_1A+F_2B+F_3C$, где F_1, F_2, F_3 — поверхности порядков $L-m$, $L-n$, $L-l$ и проходящие через O с кратностями $q-h$, $q-k$, $q-s$ соответственно.

Аналогичные результаты получены в случаях 2) и 3), причем в случае 3) результаты приведены без доказательств. В. В. Морозов

6603. Поверхности четвертого порядка. Фано (Les surfaces du quatrième ordre. Fano Gino), Univ. e Politecn. Torino. Rend. Sem. mat., 1953, 12, 301—313 (франц.)

Элементарная лекция обзорного характера, содержащая краткое описание различных специальных типов поверхностей 4-го порядка, в частности поверхности Куммера, волновой поверхности, циклиды и поверхности Штейнера. P. Du Val

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 895.

6604. Рациональные точки на кубических поверхностях. Шатле (Points rationnels sur les surfaces cubiques. Châtelet F.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), 7, № 8, 1—11 (франц.)

Предварительно излагаются результаты Сегре и Морделла, относящиеся к определению рациональных точек на кубических поверхностях. Одним из методов их отыскания является построение бирационального представления (с рациональными коэффициентами) заданной поверхности на плоскости. Но Сегре (Segre B., Math. Notes, 1951, 11) показал, что необходимым условием существования такого представления является наличие на поверхности рациональной прямой, рационального дублета, триплета или шестиплета (рациональный дублет — совокупность двух непересекающихся прямых, либо рациональных, либо сопряженных в некотором квадратичном поле; аналогично определяются три- и шестиплет); обратно, если поверхность содержит рациональный дублет, или содержит рациональный шестиплет и рациональную точку, то она допускает такое представление. Однако неизвестно, допускает ли поверхность такое представление, если она содержит рациональную прямую, или рациональный триплет.

Автор указывает метод, позволяющий отыскать рациональные точки поверхности, содержащей рациональный триплет. Метод основан на построении рационального представления поверхности на пространстве, размерности, большей двух, и применении теории нормальных простых алгебр. Кроме того, для разыскания рациональных точек поверхности $N(x+yt+zt^2)=A$, где t — нециклическое кубическое число, а N — норма числа в поле $R(t)$, указывается еще метод, основанный на теории идеалов в алгебраических полях. В. В. Морозов

6605. Изучение кремонова преобразования S_8, выведенного из квадратичного преобразования триудального S_2. Фадини (Studio di una trasformazione cremoniana dell'S_8 dedotta da una trasformazione quadratica dell'S_2 triduale. Fadini A.), Rend. Accad. sci. fis. e mat. Napoli, 1952, 19, 115—119 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

6606. Изучение кремонова преобразования S_8, выведенного из квадратичного преобразования трипотенциального S_2. Бруно (Studio di una trasformazione cremoniana dell'S_8 dedotta da una trasformazione quadratica dell'S_2 tripotenziale. Bruno R.), Rend. Accad. sci. fis. e mat. Napoli, 1953 (1952), 19, 120—124 (итал.)

6607. О соответствиях Сегре. Аргириаде (Asupra corespondenţei lui Segre. Arghiriade E.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 3—4, 97—100 (рум.)

В точке x поверхности S рассматривается пучок квадрик Гамбье. Пусть δ' — образующая прямая этого пучка. С другой стороны, пусть d — какая-нибудь прямая, проходящая через точку x, и C_0 — кривая третьего порядка в касательной плоскости, соответствующая прямой d в соответствии Сегре. Прямая δ' пересекает кривую C_0 в некоторой точке N. Прямая, соединяющая точки касания касательных, проведенных из точки N к кривой C_0, полярно, сопряжена прямой d по отношению к квадрикам рассматриваемого пучка.

Три касательные, которые можно провести к кривой третьего порядка из ее точек перегиба, совпадают с прямой d, т. е. поляры прямой d по отношению к трем пучкам квадрик, имеют с поверхностью S в точке x касание второго порядка и пересекают поверхность S вдоль кривой, имеющей в точке x тройную точку с совпадающими касательными.

Н. В. Лактанова

6608. Класс поверхностей W пятимерного пространства. Дженовезе (Una classe di superficie W dello spazio a cinque dimensioni. Genovese Carla), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 243—249 (итал.)

В проективном пространстве S_5 рассматривается алгебраическая поверхность W, как поверхность, заданная параметрическими уравнениями

$$x^{(i)} = z^{\alpha_i} t^{\beta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

где α_i, β_i — рациональные постоянные (без ограничения общности можно считать $\alpha_1 = \beta_1 = 0$; $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$; $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 1$) и x^i удовлетворяют уравнению Лапласа.

Доказана теорема: Для того чтобы поверхности W пространства S_5, удовлетворяющие уравнению Лапласа непараболического типа, допускали нуль-полярность, в которой каждой их точке x соответствует соприкасающаяся S_4, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_4 = \alpha$, $\beta_4 = \beta$, $\alpha_5 = 1 - \alpha$, $\beta_5 = 1 - \beta$; $\alpha_6 = \beta_6 = 1$ (в подходящей системе отнесения и подходящей параметризации).

В. Т. Базылев

6609. О неподвижных точках аналитических преобразований. I. Сегре (Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota I. Segre Beniamino), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1955, **19**, № 5, 200—204 (итал.)

Из своего курса в Павии (26.IX по 5. X—1955 г.) «Локальные и глобальные свойства многообразий и дифференцируемых преобразований» автор счел целесообразным выделить здесь ряд статей о некоторых свойствах неподвижных точек аналитических преобразований. В первой половине статьи I вводится терминология и обозначения для последующего.

Рассматривается аналитическое преобразование T комплексного многообразия V_n в себя, имеющее неподвижную точку 0, вблизи которой T обратимо (якобиан отличен от нуля), и изображается в допустимой системе координат уравнениями

$$\begin{aligned} u &= ax + a_{ij\ldots l} x^i y^j \ldots z^l, \\ v &= bx + b_{ij\ldots l} x^i y^j \ldots z^l, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w &= cx + c_{ij\ldots l} x^i y^j \ldots z^l, \end{aligned} \tag{1}$$

где $(x, y, \ldots, z)$ и $(u, v, \ldots, n)$ — координаты соответствующих точек; и

$$k = i + j + \ldots + l \geqslant 2. \tag{2}$$

Комплексные коэффициенты $a, b, \ldots, a_{ij\ldots l} \ldots$ подчиняются требованию сходимости рядов; n коэффициентов расширения $a, b, \ldots, c$ являются инвариантами T в точке O.

Наиболее общее преобразование координат типа

$$X = x + \alpha_{ij\ldots l} x^i y^j \ldots z^l, \tag{3}$$

$$U = u + \alpha_{ij\ldots l} u^i v^j \ldots w^l \tag{4}$$

с преобразованием расширения сохраняет форму уравнений (1)

$$U = aX + A_{ij\ldots l} X^i Y^j \ldots Z^l. \tag{5}$$

Исключение координат $x, y, \ldots, z$ и $u, v, \ldots, w$ имеет смысл при условии сходимости рядов (3); если ряды (3) не сходятся, то ряды (5) назовем формальными.

Если все $A_{ij\ldots l}$ могут обратиться в нули, то T — линеаризуемо в точке O.

$$U = aX, \; V = bY, \; \ldots W = cZ. \tag{6}$$

Уравнения (5) можно интерпретировать как преобразование θ — многообразия W_n в себя, с неподвижной точкой $\Omega(0, 0, \ldots, 0)$, а уравнения (3) или (4) — как соответствия окрестности O на V_n и окрестности Ω на W_n. Преобразования T и θ эквивалентны формально или существенно, последнее при сходимости (3).

Основная проблема — признаки эквивалентности, формальной или существенной, в окрестности пары соответствующих неподвижных точек.

T — арифметически общее, если ни один из коэффициентов расширения $a, b, \ldots c$ не может быть представлен в виде $a^i b^j \ldots c^l$, $i + j + \ldots + l > 1$ ($i, j, \ldots, l$ — целые положительные). Два преобразования, каждое из которых имеет неподвижную точку и соответственно равные коэффициенты расширения, всегда формально эквивалентны, если они арифметически общие. Аналитическое преобразование с неподвижной точкой — в случае арифметической общности — не имеет никакого топологического инварианта, не зависящего от коэффициентов расширения, и всегда формально линеаризуемо.

С. С. Бюшгенс

6610. О неподвижных точках аналитических преобразований. II. Сегре (Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota II. Segre Beniamino), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955 (1956), **19**, № 6, 357—361 (итал.)

Первая теорема статьи 1 (реф. 6609) дополняется предложением: два аналитических преобразования с неподвижными точками и соответственно равными для них коэффициентами расширения будут существенно эквивалентны, если оба преобразования арифметически общие и их коэффициенты расширения либо все по абсолютной величине меньше единицы, либо все больше единицы. Для доказательства достаточно установить, что преобразование T, если каждый из коэффициентов расширения по абсолютной величине меньше единицы, является существенно линеаризуемым. Это последнее предложение доказывается с помощью некоторого преобразования T'', которое является существенно линеаризуемым и в то же время мажорантным для преобразования (1'), полученного из (1) умножением каждой координаты на произвольный постоянный множитель. Отсюда следует аналогичный результат для преобразования, у которого все коэффициенты расширения по абсолютной величине больше единицы, ибо преобразование T^{-1} имеет в O неподвижную точку, его коэффициенты расширения будут $a^{-1}, b^{-1}, \ldots, c^{-1}$, наконец существенная линеаризуемость T влечет за собой таковую же для T^{-1}.

С. С. Бюшгенс

6611. О нормальности многообразия Чжоу положительных 0-циклов степени m на алгебраическом многообразии. Нагата (On the normality of the Chow variety of positive 0-cycles of degree m in an algebraic variety. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, A29, № 2, 165—176 (англ.)

Устанавливаются следующие связи между проективным многообразием V над полем k характеристики p и многообразием $V(m)$ его положительных 0-циклов степени m. $V(m)$ бирегулярно инвариантно, т. е. если V и V' бирегулярно эквивалентны, то $V(m)$ и $V'(m)$ также бирегулярно эквивалентны; для любого V найдется такое бирационально эквивалентное ему многообразие V', что $V'(m)$ нормально; в случае, если $p=0$ и V нормально, то $V(m)$ также нормально. Доказывается один результат, относящийся к наследственности свойства арифметической нормальности: пусть P — проективное пространство над полем k характеристики нуль и пусть $P(m)$ арифметически нормально; тогда для любого арифметически нормального многообразия V в P над k, $V(m)$ будет также арифметически нормальным. В. В. Морозов

6612. Об арифметически нормальных многообразиях. Маркьонна (Sulle varietà aritmeticamente normali. Marchionna Ermanno) Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1951—52, 6, 45—56 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Доказываются две теоремы, содержащие условия на плоскую проекцию несингулярной неприводимой пространственной кривой C, необходимые и достаточные для того, чтобы C была арифметически нормальна. Упоминаются также обобщения на кривые в пространствах большего числа измерений и на многообразия высших размерностей. H. T. Muhly

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 982.

6613 К. Алгебраические многообразия. Балдассарри (Algebraic varieties. Baldassarri M. Ergebn. Math., Berlin, Springer, 1956, № 12, 195 S.) (англ.)

Содержание книги: 1. Обзор основных понятий; 2. Разрешение особенностей; 3. Линейные системы; 4. Геометрический жанр; 5. Арифметический жанр; 6. Алгебраическая и рациональная эквивалентность; 7. Абелевы многообразия; 8. Теория и применения канонических систем; 9. Алгебраические многообразия как комплексные аналитические многообразия; 10. Приложения теории пучков; 11. Поверхностная иррегулярность и непрерывные системы.

Книга представляет обзор важнейших аспектов современной алгебраической геометрии, обзор весьма компактный и вмещающий огромное количество материала и потому, естественно, краткий. Первые восемь глав относятся к алгебраическим многообразиям (м.) в собственном смысле, здесь указываются современные трактовки и обобщения классических вопросов и понятий, как то: теорема Зариского о разрешении особенностей трехмерников (гл. 2), добавления Зариского, Мацусаки и Акицуки к теоремам Бертини (гл. 3), арифметическое определение канонических систем Зариского (гл. 4), теории арифметического жанра Севери и Зариского (гл. 5), доказательство Чжоу существования проективной модели якобиева многообразия, доказательство Нерона теоремы Севери о базисе, открытые Мацусакой обобщения свойств якобиевых м. на пикаровы м. (гл. 7), алгебра систем эквивалентностей и ковариантных последовательностей Тодда—Сегре (гл. 8).

Последние три главы выходят за пределы собственно алгебраической геометрии; они относятся к теории компактных комплексных аналитических многообразий с кэлеровой метрикой. Здесь кратко излагаются некоторые вопросы теории внешних дифференциальных форм и потоков, теория Ходжа—Экмана кэлеровых м., связи ковариантных последовательностей Сегре с характеристическими классами Чженя (гл. 9), общие сведения по теории пучков и ее приложения, теория положительных комплексных пучков Кодайры, теория пикаровых м. и теорема Римана—Роха для присоединенной системы произвольного несингулярного дивизора Кодайры—Спенсера, исследования Хирцебруха, относящиеся к теореме Римана—Роха (гл. 10) и, наконец, открытые Кодайрой обобщения на высшие м. классических результатов о дефекте линейных систем, поверхностной иррегулярности и характеристической системе полной непрерывной системы (гл. 11).

Многочисленные замечания исторического характера и дополнительные указания на возникающие связи с другими областями вынесены в мелкий текст, занимающий около 12% объема книги.

В. В. Морозов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

6614. О поверхностях постоянной отрицательной кривизны в трехмерном пространстве и об их особенностях. Амслер (Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités. Amsler Marc-Henri), Math. Ann., 1955, 130, № 3, 234—256 (франц.)

Согласно теореме Гильберта, в трехмерном евклидовом пространстве невозможна полная и всюду регулярная поверхность кривизны $K=-1$. Автор исследует границу непродолжаемого куска такой поверхности. Пусть поверхность F' кривизны $K=-1$ принадлежит классу C^q ($q\geqslant 3$), а в асимптотических параметрах u, v, $\omega=\omega(u,v)$ — угол между ее асимптотическими; тогда

$$\text{а) } \omega(u,v)\in C^{q-2},\quad \text{б) } \sin\omega(u,v)>0,$$

и для любого асимптотического четырехугольника

$$u=u_1,\ u=u_2,\ v=v_1,\ v=v_2$$

$$\text{в) } \omega(u_1,v_1)-\omega(u_2,v_1)+\omega(u_2,v_2)-\omega(u_1,v_2)=\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\sin\omega\,du\,dv.$$

Обратно, если соблюдены а), б), в), то существует поверхность F', на которой образующая функция $\omega=\omega(u,v)$ имеет указанный смысл. Образующая функция однозначно определяется значениями на характеристиках в). Если A_0' — асимптотический четырехугольник на F', A_0 — его прообраз в плоскости u, v, то функция ω допускает регулярное продолжение ω_1 за границу A_0. Этому продолжению ω_1 соответствует в пространстве асимптотический четырехугольник A_1' (продолжение A_0'). Поверхность F' не допускает разветвлений, если для любого A_0' на F' и для любой точки ее границы существует окрестность, целиком лежащая на F' и на A_1'.

Аналитические поверхности не допускают разветвлений. Дается пример поверхности, допускающей разветвления. Результаты: Каждая аналитическая непродолжаемая поверхность $K=-1$ имеет (в составе своей границы) по крайней мере одну кривую из особых точек; эта кривая неограниченно дифференцируема, а предельное положение нормали вдоль нее регулярно.

Если S — точка особой кривой, а плоскость x, y — предельное положение касательной плоскости в точке S, то в окрестности S поверхность представляется аналитической функцией $z(x, y)$. На некоторой дуге Γ особой кривой, в окрестности S функция $z(x, y)$ перестает быть аналитической. Особенности Γ могут быть двух видов:

а) в каждой точке Γ функция ω теряет аналитичность; дуга Γ неограниченно дифференцируема и является пределом асимптотических одного семейства. Иногда возможно продолжение поверхности через Γ (при ухудшении регулярности).

б) в каждой точке Γ функция $\omega(x, y)$ остается аналитической; Γ аналитична и является огибающей двух семейств асимптотических линий; средняя кривизна поверхности на Γ обращается в бесконечность, а $\sin\omega$ — в нуль. Продолжение поверхности через Γ невозможно.

Особенности второго типа хорошо известны (поверхности вращения). Пример особенности первого типа указан автором. Н. В. Ефимов

6615. Уравнение линейчатой поверхности в асимптотических параметрах. Цыганков И. В., Уч. зап. Молотовск. ун-та, 1955, **9**, № 4, 7—9

Устанавливаются условия, при которых формулы Лельевра

$$\overline{M}_u = [\overline{N}\,\overline{N}_u],\ \overline{M}_v = -[\overline{N}\,\overline{N}_v],$$

где вектор $\overline{N}$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{N}_{uv} = Q\overline{N},$$

определяют линейчатую поверхность $\overline{M} = \overline{M}(uv)$.

Условия имеют вид

$$\overline{N}_{uv} = (\ln Q)_u\overline{N},\ (\ln Q)_{uv} = Q.$$

Полученная система интегрируется в квадратурах. Интеграл системы

$$\overline{M} = \int_{v_0}^{v}\left\{\left(\left(\frac{V''}{V'}\right)^2 - 2\left(\frac{V''}{V'}\right)'\right)[\overline{V}_1'\,\overline{V}_1] + [\overline{V}_1''\overline{V}_1']\right\}dv + \left(\frac{V''}{V'} - \frac{2V'}{U+V}\right)[\overline{V}'\,\overline{V}_1],$$

где U, V суть функции от переменных u, v соответственно, $\overline{V}_1$ — произвольная вектор-функция от v, представляет в общем виде уравнение линейчатой поверхности в асимптотических параметрах.

А. М. Березман

6616. О разложении комплекса в конгруэнции прямых. Георгиев (Despre descompunerea unui complex in congruenţe remarcabile de drepte. Gheorghiev Gh.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. 1, 1955, **1**, № 1—2, 53—68 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор замечает, что проблема расслоения комплекса в те или иные конгруэнции восходит еще к Малюсу. Однако предшествующих авторов эта проблема больше занимала в связи с различными нормальными конгруэнциями, в то время как другим конгруэнциям, способным расслаивать те или иные комплексы, было уделено гораздо более скромное внимание. Автор рассматривает свою работу как попытку приблизиться к систематическому исследованию этой проблемы с помощью метода внешних форм Картана. Исследования ведутся только в метрическом пространстве, хотя иногда предметом внимания оказываются объекты и более общей природы (параболические конгруэнции, специальные комплексы и т. д.). Для каждого комплекса, допускающего то или иное расслоение, находятся соответствующие алгебраические соотношения между его метрическими инвариантами, причем автор лишь в отдельных случаях утверждает как разумеющееся существование исследуемых геометрических объектов, не подсчитывая, однако, широты их класса. Для характеристики различных комплексов, возникающих при исследовании, автором привлекаются к рассмотрению такие понятия, как центр луча комплекса, фокусы и граничные точки конгруэнций, расслаивающих комплекс, параметры распределения линейчатых поверхностей, точки P_1 и P_2, отстоящие от центра луча на расстоянии, равном кривизне комплекса в данном луче (по терминологии автора — обратном кривизне), и т. д. Отдельно исследуются линейный комплекс, а также специальный, полуспециальный (совокупность центров лучей вырождается в поверхность) и цилиндрический (сферическое изображение лучей вырождается в кривую) комплексы. Библ. 16 назв. Н. И. Кованцов

6617. Несколько замечаний о замкнутых линейчатых поверхностях с направляющей плоскостью. Сабан (Qualche osservazione sulle rigate a piano direttore chiuse. Saban Giacomo), Arch. Math. 1956, **7**, № 3, 214—218 (итал.)

На замкнутой линейчатой поверхности, у которой образующие параллельны некоторой плоскости, существуют по крайней мере две образующие, вдоль которых касательная плоскость стационарна и четыре образующих, вдоль которых соприкасающаяся конгруэнция стационарна. Последнее — при условии, что индикатриса образующих однократно покрывает большой круг сферы. Я. П. Бланк

6618. Линейчатые поверхности Γ конгруэнций и пучки Γ на поверхностях. Рыбаков В. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **1**, М., АН СССР, 1956, 165—166

Рассматривается вопрос о разложении конгруэнций прямых на линейчатые поверхности Γ, которые определяются как совокупность главных нормалей пространственной кривой (РЖМат, 1954, 3814; 1956, 9051).

Рассматривается, далее, пучок Γ на поверхности — совокупность кривых поверхности, главные нормали которых лежат в одной плоскости. Установлен ряд геометрических свойств, сформулированных в терминах пучков и поверхностей Γ. А. М. Березман

6619. К теории конгруэнций *W*. Годо (Sur la théorie des congruences W. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 11, 1028—1037 (франц.)

В проективном пространстве S_3 рассматривается конгруэнция W, т. е. конгруэнция, асимптотические линии на фокальных поверхностях которой соответствуют.

Пусть (j) — конгруэнция W и (x), $(\bar{x})$ — ее фокальные поверхности, отнесенные к асимптотическим линиям u, v.

В проективном пространстве S_5 касательным к асимптотическим u, v ставятся в соответствие точки U, V, лежащие на гиперквадрике Клейна. Точки U, V принадлежат последовательности Лапласа

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

Аналогично, в S_5 последовательность Лапласа

$$\overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots$$

соответствует поверхности $(\bar{x})$ в S_3.

Конгруэнция W образована прямой j и J — ее образ, принадлежащий последовательности

$$J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots.$$

Последовательность

$$\ldots, P_{-n}, \ldots, P_{-1}, P, P_1, \ldots, P_n, \ldots$$

содержит точки P — образы соприкасающегося линейного комплекса конгруэнции (j).

Между этими последовательностями рассматриваются взаимные соотношения. Выводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы конгруэнция W принадлежала линейному комплексу.

Н. В. Лактанова

6620. К теории конгруэнций W (Вторая статья). **Годо** (Sur la théorie des congruences W. (Seconde note). Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 3, 343—345 (франц.)

Применяется тот же метод, что и в первой статье того же названия (реф. 6619).

В пятимерном проективном пространстве S_5 рассматривается последовательность Лапласа

$$\ldots U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

присоединенная к изображению асимптотических касательных поверхности (x) трехмерного проективного пространства S_3. К конгруэнции W, образованной прямой j пространства S_3, присоединяется в пространстве S_5 последовательность Лапласа

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots$$

В дополнение к первой статье показано, как может быть определена вторая фокальная поверхность конгруэнции W, если известна первая. Н. В. Лактанова

6621. К теории конгруэнций W (Третья статья). **Годо** (Sur la théorie des congruences W. (Troisième note) Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 3, 240—244 (франц.)

В первых двух статьях того же названия (реф. 6619 и 6620) к конгруэнции W присоединялся подвижной тетраэдр Картана и фокусы конгруэнции не играли симметричную роль. Теперь к конгруэнции W присоединяется подвижной тетраэдр, симметричный относительно фокусов.

Квадрики Ли, присоединенные к точкам $x, \bar{x}$ фокальных поверхностей (x), $(\bar{x})$ конгруэнции W, имеют общий пространственный четырехсторонник. Следовательно, произведение полярных соответствий по отношению к этим квадрикам есть гомография, две двойные оси которой r_1, r_2 образуют со сторонами этого четырехсторонника тетраэдр.

Обозначим через s_1 прямую, проходящую через точку x и пересекающую r_1, r_2, и через s_2 прямую, проходящую через точку $\bar{x}$ и пересекающую r_1, r_2. Пусть $\bar{m}$ — точка прямой s_1, гармонически сопряженная точке x по отношению к точкам пересечения s_1 с прямыми r_1, r_2. Аналогично $\bar{n}$ — точка прямой s_2, гармонически сопряженная точке $\bar{x}$ по отношению к точкам пересечения s_2 с прямыми r_1, r_2. Тетраэдр с вершинами $x, \bar{x}, \bar{m}, \bar{n}$ — искомый. Н. В. Лактанова

6622 К. Теория поверхностей (Учебник для ун-тов и пед. ин-тов). Норден А. П., Гостехиздат, 1956, 260 стр., илл., 5 р. 35 к.

Книга содержит тензорное изложение теории поверхностей и является учебником для годового спецкурса или спецсеминара. Предполагается знакомство с общим курсом дифференциальной геометрии.

Первая глава содержит теорию кривых и носит повторительный характер. В гл. 2 изложена тензорная алгебра. Вводится косое произведение двух векторов ориентированной плоскости $\langle ab \rangle = (abn)$ и вектор $\bar{a} = [na]$ — дополнительный к вектору a. Эти два понятия широко использованы в книге. Подробно изучается симметричный тензор второй валентности и его индикатриса.

Гл. 3 — «Поверхность и ее касательная плоскость», — также носит повторительный характер. В гл. 4 вводится понятие линейного элемента и наложимости поверхностей. Здесь же рассматривается конформное и эквивалентное соответствие. Гл. 5 посвящена второй квадратичной форме и связанным с ней понятиям.

В гл. 6 и 7 рассматриваются некоторые специальные классы поверхностей: вращения, винтовые, резные, каналовые, линейчатые, а также основы теории прямолинейных конгруэнций.

В гл. 8, посвященной векторным и тензорным полям на поверхности, исследуются скалярные поля, ротация векторного поля, дивергенция, лапласовы поля, гармонические функции и изотермические координаты. В этой же главе вводятся деривационные формулы Гаусса, параллельное перенесение векторов, абсолютное и ковариантное дифференцирование. Для векторного поля выводится соотношение $\nabla_j a_i = \alpha_i \bar{a}_i + A_j a_i$, которое автор называет основным дифференциальным уравнением векторного поля. $A_j = \partial_j \ln |a|$ — логарифмический градиент модуля данного вектора, α_j — трансверсальный вектор поля.

Гл. 9 трактует о геодезической кривизне и геодезических линиях. В частности, рассматриваются геодезически-изотермические и геодезически-биссекторные поля, поверхности Лиувиля и Вейнгартена.

В гл. 10 изучаются элементы теории сетей, в частности чебышевский вектор сети, кодацциевы сети, геодезические, чебышевские, сети равных путей, изотропные. В гл. 11 изложены отображения поверхностей: общие свойства, конформное, сферическое, геодезическое отображение, инверсия и стереографическая проекция. Гл. 12 содержит теорему Гаусса, Гаусса—Бонне, Петерсона и уравнение изгибания. Последние три главы посвящены поверхностям постоянной кривизны, минимальным и триортогональным системам поверхностей.

Изложение такого обширного материала в сравнительно небольшой по объему книге удалось автору благодаря умелому использованию общих преимуществ тензорного метода, а также тех его особенностей, которые характерны для двумерной области.

Я. П. Бланк

6623 К. Дифференциальная геометрия. Часть I. Норден (Differentialgeometrie. Teil I. Norden A. P. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 135 S., ill.) (нем.)

Перевод первой части книги А. П. Нордена «Дифференциальная геометрия» (М., Учпедгиз, 1948). Книга предназначается в качестве учебного пособия для педагогических институтов, но может служить пособием также и для университетов. Первая часть содержит теорию плоских и пространственных кривых и теорию развертывающихся поверхностей. Встречающиеся в тексте оригинала решения упражнений переводчик перенес в конец книги. А. Е. Либер

6624 К. Лекции по дифференциальной геометрии. Изд. 2-е. Погорелов А. В. Харьков, Харьковск. ун-т, 1956, 184 стр., илл., 3 р. 85 к.

См. РЖМат, 1956, 8289.

ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6625. О гиперкомплексе прямых в проективном пространстве P_4. Гринцевичюс К. И., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 6, 785—788

Дано инвариантное построение дифференциальной геометрии гиперкомплекса прямых четырехмерного

проективного пространства. Ряду объектов, охваченных фундаментальным объектом гиперкомплекса, дано геометрическое истолкование. П. И. Швейкин

6626. Гиперкомплекс прямых в многомерном проективном пространстве. Гринцевичюс К. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 148—149

Аналитическим способом получены основные дифференциально-геометрические понятия, связанные с гиперкомплексом прямых в многомерном проективном пространстве. Дана геометрическая интерпретация этих понятий. Работа выполнена методом Г. Ф. Лаптева (РЖМат, 1953, 433). А. М. Березман

6627. Тензорные характеристики некоторых типов пар конгруэнций поверхностей риманова пространства. Чернышенко В. М., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 279—283

Рассматриваются пары конгруэнций поверхностей в римановом пространстве R_n. Поверхности задаются полями простых поливекторов, определяющих в каждой точке касательные плоскости к ним. Даются определения:

1. Пара конгруэнций называется голономной, если в R_n существует система координат, в которой поверхности первой конгруэнции определяются уравнениями $u^i = \text{const}$ $(i = p+1, \ldots, n)$, а поверхности второй конгруэнции — уравнениями

$$u^j = \text{const}\ (j = 1, \ldots, p,\ p+q+1, \ldots, n).$$

2. Если при отображении с помощью поверхностей второй конгруэнции любой p-мерной области поверхности первой конгруэнции голономной пары на близкую к ней поверхность той же конгруэнции, объем области сохраняется, то пара конгруэнций называется метрически-получебышевской, а первая конгруэнция — чебышевской конгруэнцией. Если в паре конгруэнций обе конгруэнции — чебышевские, то пара называется метрически-чебышевской.

3. Если при параллельном переносе любого вектора, принадлежащего поверхности первой конгруэнции, вдоль пути на поверхности второй конгруэнции, вектор остается на поверхностях первой конгруэнции, то пара конгруэнций называется получебышевской в смысле перенесения. Тогда первая конгруэнция называется чебышевской конгруэнцией в смысле перенесения. Если обе конгруэнции чебышевские в смысле перенесения, то пара называется чебышевской в смысле перенесения. Найдены тензоры, обращение которых в нуль является необходимым и достаточным условием для того, чтобы пара была метрически-получебышевской, метрически-чебышевской, получебышевской в смысле перенесения; чебышевская в смысле перенесения голономная пара является метрически-чебышевской. П. М. Олоничев

6628. Инвариант θ_{n+1} как основной совместный инвариант для $l \leqslant n+1$ гиперповерхностей 2-го порядка n-мерного пространства. Палай (L'invariant θ_{n+1} comme un invariant simultané fondamental d'une jusqu'à $n+1$ hyperquadriques dans l'espace à n dimensions. Palaj Cyril), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 3, 345—354 (франц.; рез. русск.)

В проективном пространстве n измерений рассматриваются $n+1$ гиперповерхностей 2-го порядка, каждая из которых определяется уравнением $k_v^{(n)} = \sum_{i,\ j=1}^{n+1} a_{vij}x_ix_j = 0$, $v = 1, 2, \ldots, n+1$. Составляется кубическая матрица, определитель которой

$$\theta_{n+1} = |a_{1ij}|a_{2ij}|a_{3ij}|\ldots|a_{ni}|a_{n+1,i,j}|,$$

где $|a_{v,i,j}|$ есть матрица дискриминантов данных квадратичных форм. Доказаны теоремы:

1. Если каждая из $n+1$ гиперповерхностей 2-го порядка n-мерного пространства полярно описана около огибающей гиперплоскостей, которые пересекают остальные n гиперквадрик по n гиперповерхностям 2-го порядка $(n-1)$-мерного пространства, из которых каждая полярно описана около огибающей гиперплоскостей $(n-1)$-мерного пространства, пересекающих остальные $n-1$ из этих n гиперквадрик по $n-1$ гиперповерхностям 2-го порядка $(n-2)$-мерного пространства, которые находятся в аналогичном положении, и т. д., наконец, получаем три кривых 2-го порядка на плоскости, каждая из которых полярно описана около огибающей прямых, пересекающих две остальные кривые по гармонической четверке точек, то эти $n+1$ гиперквадрики n-мерного пространства удовлетворяют соотношению $\theta_{n+1} = 0$. Справедлива и обратная теорема:

2. Если существует общий полярный $(n+1)$-эдр двух гиперповерхностей 2-го порядка $k_1^{(n)}$, $k_2^{(n)}$ n-мерного пространства, каждая грань которого пересекает гиперповерхности 2-го порядка $k_3^{(n)}, k_4^{(n)}, \ldots, k_{n+1}^{(n)}$ по гиперквадрикам $n-2$-мерного пространства, для которых $\theta_{n-1} = 0$, то все гиперквадрики $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \ldots, k_{n+1}^{(n)}$ находятся взаимно в таком положении, для которого $\theta_{n+1} = 0$. О. С. Редозубова

6629. Геометрия поверхностей в пространствах с заданной фундаментальной группой. Либер А. Е. Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1955, 115, № 10, 9—1

Доказано существование фундаментальной системы геометрических дифференциальных объектов поверхности и найдены соотношения, являющиеся аналогом уравнений Гаусса-Петерсона-Риччи. Для поверхностей в евклидовом, аффинном и центрально-аффинном пространствах система таких объектов построена. Результаты частично использованы при построении теории поверхностей в аффинном и проективном пространствах и при изучении p-тканей. П. И. Швейки

6630. Обобщенные тензоры Вейерштрасса. Фултон (Generalized Weierstrass tensors. Fulton Curtis M.), Tensor (N. S.) 1953, 3, 23—2 (англ.)

Автор определяет тензор Δ_i^h (B_i^h у Схоутена и Стройка Введение в новые методы дифференциальной геометрии т. II., М.—Л., 1948), с помощью которого легко строится проекция аффинора V_m или V_n (V_m в V задается уравнениями $F^\alpha(x^1, \ldots, x^n) = 0$). J. Haantje

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 352.

6631. Геометрия простых групп Ли, как неевклидова геометрия. Розенфельд Б. А., Уч. зап. Казанск ун-та, 1955, 115, № 10, 7—8

Как известно, простые группы Ли исчерпываются четырьмя бесконечными сериями A_n, B_n, C_n, D_n пятью изолированными группами E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2 Известно также, что группы A_n, B_n, C_n, D_n, G_2 и F могут быть реализованы в виде групп движений соответствующих вещественных, комплексных или гиперкомплексных неевклидовых пространств.

В настоящей работе доказывается, что компактная группа E_6 может быть реализована в виде группы движений комплексной октавной неевклидовой плоскости и что эта плоскость является симметрическим римановым пространством ранга 2. Комплексными октавами автор называет выражения вида $A = a + bi$ где a, b — октавы (числа Кели), а i — мнимая единица перестановочная со всеми октавами. М. А. Джавадов

6632. Неевклидова геометрия и простые группы Ли. Розенфельд Б. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 165

Дается геометрическая интерпретация простых компактных групп E_6, E_7, E_8 с помощью чисел Кели.

А. С. Феденко

6633. Вполне геодезические многообразия в пространстве симметрических матриц. Далла-Вольта (Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche. Dalla Volta V.), Rend. mat. e applic., 1955, **13**, № 3—4, 294—334 (итал.)

Продолжается изучение геометрии пространства симметрических комплексных матриц p-го порядка $Z = X + iY$ (РЖМат, 1956, 9076), являющегося келеровым и симметрическим в смысле Э. Картана $p(p+1)$-мерным пространством. Квадрат расстояния между матрицами Z и $Z + dZ$ определяется как след матрицы $Y^{-1}dZY^{-1}d\bar{Z}$.

В первой части статьи исследуются вполне геодезические гиперповерхности, являющиеся характеристическими, т. е. связанные с характеристическим уравнением $|Q - \lambda E| = 0$, где $Q = Y^{-1}(s)\dot{Z}(s)Y^{-1}(s)\dot{\bar{Z}}(s)$, $Z(s)$ — геодезические, выходящие из точки iE, $\dot{Z}(s) = dZ/ds$. Доказывается, что они являются пространствами постоянной кривизны. Выводится признак того, чтобы характеристические гиперповерхности были вполне геодезическими. Более подробно разбирается случай $p = 2$.

Во второй части рассматриваются p-мерные вполне геодезические поверхности V_p, несущие на себе евклидову метрику. Указывается, что в касательном пространстве каждой точки Z можно выделить плоскости $\pi_p(Z)$ так, что геодезические многообразия, касательные к $\pi_p(Z)$ в каждой данной точке Z, будут вполне геодезическими и евклидовыми пространствами.

Г. И. Кручкович

6634. О пучках одномерных геометрических объектов в X_1^r класса $\geqslant 2$. Пензов Ю. Е., Науч. ежегодник за 1954 г. Саратовск. ун-т, Саратов, 1955, 671—673

По содержанию работа идентична другой (одноименной) работе того же автора (РЖМат, 1956, 8316).

П. И. Швейкин

6635. Изоморфные преобразования минимальных гиперповерхностей в финслеровом пространстве. Су Буцин (苏步青 关于极小超曲面的同態 变换. 蘇步青), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1955, 5, № 4, 471—488 (кит.; рез. англ.)

В расслоенном финслеровом пространстве (РЖМат, 1956, 4063) рассматриваются инфинитезимальные преобразования

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\,\delta t$$

минимальных гиперповерхностей. Если такое преобразование переводит минимальную гиперповерхность снова в минимальную, то оно называется изоморфным. В работе находятся условия, которым должны удовлетворять параметры $\xi^i(x)$ инфинитезимального преобразования, чтобы оно было изоморфным. Эти условия связаны определенным образом со второй вариацией $(n-1)$-кратного интеграла по поверхности.

М. А. Акивис

6636. К теории симметрических пространств. Широков П. А. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 14, 3—19

Статья покойного проф. П. А. Широкова разработана и оформлена его сыном А. П. Широковым.

Симметрические пространства V_n характеризуются, как известно, условием

$$R_{hijk,e} = 0\ (h, i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n),$$

где R_{hijk} — тензор кривизны V_n и запятая — знак ковариантного дифференцирования. Условия его интегрируемости имеют вид

$$R_{pijk}R^p_{.hem} + R_{hpjk}R^p_{.iem} + R_{hipk}R^p_{.jem} + R_{hijp}R^p_{.kem} = 0.$$

Вводя собирательные индексы α, β так, что $R_{1414} = p_{11}$, $R_{1424} = p_{12}$ и т. д. автор доказывает, что в V_4 в точке M_0 пространства V_4, при подходящем выборе системы координат, получим $g_{ij} = \delta_{ij}$ и

$$(p_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & P \end{pmatrix},$$

где $P = (p_{\sigma\mu})$, $Q = (q_{\sigma\mu})$, $q_{\sigma\mu} = p_{\sigma\mu+3}$, $(\sigma, \mu = 1, 2, 3)$, а матрицы P и Q имеют один из следующих трех видов:

I. $P = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, $Q = 0$;

II. $P = \begin{pmatrix} 4\rho & & \\ & \rho & \\ & & \rho \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -2\rho & & \\ & \rho & \\ & & \rho \end{pmatrix}$;

III. $P = \begin{pmatrix} 2\rho & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $Q = 0$.

Пространства I допускают 6-членную стационарную подгруппу и приводят к пространствам постоянной кривизны. Пространства II имеют 4-членную стационарную подгруппу с операторами X_{14}, X_{23}, $X_{24} + X_{31}$, $X_{34} + X_{12}$. Пространства III имеют 2-членную стационарную подгруппу с операторами X_{14}, X_{23} (здесь $X_{ij} = -x^j p_i + x^i p_j$, $p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$). Эти результаты переносятся на пространства V_4 с неопределенной метрикой. Для геометрического изучения пространств вводятся новые координаты Бельтрами, причем линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = k^2 \frac{(k^2 + a_{ij}x^i x^j)a_{ke}x^k x^l - (a_{ij}x^i dx^j)^2 - (b_{ij}x^i dx^j)^2}{(k^2 - a_{ij}x^i x^j)^2}.$$

Рассматривается отображение данного V_{2m} на евклидово пространство E_{2m} с метрическим тензором a_{ij} по принципу равенства координат; при этом геодезические V_{2m} переходят в окружности E_{2m}. Их плоскости соответствуют двумерным поверхностям V_{2m}, несущим метрику постоянной кривизны. Отсюда — конечное уравнение геодезической, проходящей через две точки. Далее изучается тригонометрия полученных пространств.

В примечании доказывается, что пространства V_{2m} представляют собою вещественную реализацию комплексных унитарных m-мерных пространств вещественной постоянной кривизны.

Н. С. Синюков

6637. О группе конформных преобразований в римановом многообразии. Исихара, Обата (On the group of conformal transformations of a Riemannian manifold. Ishihara Shigeru, Obata Morio), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 7, 426—429 (англ.)

Рассматривается группа $K(M)$ конформных преобразований связного дифференцируемого риманова многообразия M измерения $n(n \geqslant 3)$ с фундаментальным тензорным полем G, т. е. таких преобразований φ, для которых $(\varphi G)_p = \rho(p) G_p$ в каждой точке $p \in M$ ($\rho(p) > 0$). Показывается равенство нулю тензора конформной кривизны многообразия M ($n > 3$) во всякой гомотетической точке (так называется точка $p \in M$, в которой группа линейных преобразований векторов касательного в p пространства T_p, индуцированная группой изотропии в этой точке, не содержится в ортогональной группе); в случае $n = 3$ в рассматриваемой точке равен нулю тензор $L_{ijk} = R_{ij,k} - {}^1/_4 g_{ij} R_{,k} - R_{ik,j} + {}^1/_4 g_{ik} R_{,j}$, где R_{ij} и R обозначают соответственно контрактированный тензор кривизны и скалярную кривизну многообразия M. Этот факт выводится из того, что вообще всякий тензор вещественного n-мерного векторного пространства T_p r раз контравариантный и s раз ковариантный ($r \neq s$), инвариантный при гомотетическом преобразовании (не совпадающем с ортогональным) пространства T_p является нулевым тензором. Если группа конформных преобразований $K(M)$ транзитивна и многообразие M обладает гомотетической точкой, то это многообразие является конформно-плоским. Далее утверждается (без доказательства), что конформное преобразование φ связного неконформно евклидова многообразия M не имеет неподвижной точки, если $\rho(p) < 1 - \varepsilon$ или $\rho(p) > 1 + \varepsilon$ в любой точке $p \in M$ (постоянная $\varepsilon > 0$). И. П. Егоров

6638. Структура одного риманова пространства. **Оцуки** (Structure of a Riemann space. Ōtsuki Tominosuke), Proc. Japan Acad., 1953, 29, 475—477 (англ).

Автор изучает риманово пространство, у которого тензор Риччи удовлетворяет условиям $R^k_i R^j_k = (n-1)^{-1} R R^j_i$, $R^j_{i,k} = 0$, где запятая означает ковариантное дифференцирование. Доказывается, что такое пространство является или пространством Эйнштейна или произведением пространства Эйнштейна и прямой линии. S. Chern

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 72.

6639. Об аффиноре кривизны аффинно-связного многообразия $A_n (n \geqslant 7)$, допускающего группу аффинных движений G_r порядка $r > n^2 - 2n$. **Мутo** (On the curvature affinor of an affinely connected manifold A_n, $n \geqslant 7$, admitting a group of affine motions G_r of order $r > n^2 - 2n$. Mutō Yosio), Tensor, 1955, 5, № 1, 39—53 (англ.)

Рассматриваются условия интегрируемости системы уравнений, определяющей координаты вектора бесконечно малого движения аффинно-связного пространства A_n без кручения.

Показывается, что тензор $R^\lambda_{\mu\nu\omega}$ ($\lambda, \mu, \nu, \omega = 1, 2, \ldots, n$) пространства A_n можно представить в форме

$$R^\lambda_{\mu\nu\omega} = A^\lambda B_{\mu\nu\omega} + \delta^\lambda_\mu (P_{\nu\omega} - P_{\omega\nu}) + \delta^\lambda_\nu P_{\mu\omega} - \delta^\lambda_\omega P_{\mu\nu},$$

если A_n ($n \geqslant 5$) допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n$ (см. заметку референта, Докл. АН СССР, 1951, 80, № 5, 711), или в форме $R^\lambda_{\mu\nu\omega} = A^\lambda B_{\mu\nu\omega} + C^\lambda D_{\mu\nu\omega} + \delta^\lambda_\mu (P_{\nu\omega} - P_{\omega\nu}) + \delta^\lambda_\nu P_{\mu\omega} - \delta^\lambda_\omega P_{\mu\nu}$,

если A_n ($n \geqslant 7$) допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n$. И. П. Егоров

6640. О нормальных координатах в пространствах проективной связности с однородными координатами. **Насу** (On normal coordinates in projectively connected spaces with homogeneous coordinates. Nasu Yasuo), Kumamoto J. Sci., 1953, **A1**, № 2, 8—13 (англ.)

В основу положено n-мерное многообразие с однородными координатами ван-Данцига (van Dantzig) $x^0, x^1, \ldots, x^n$. В нем по Схаутену и Хантьесу (Schouten, Haantjes) определена проективная связность с помощью геометрического объекта $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$. Автор показывает, что в таком многообразии можно в произвольной точке $\overset{\lambda}{x_0}$ ввести нормальные координаты, которые определяются тем, что выполняются соотношения

$$\left(\Pi^\lambda_{(\mu\nu)}\right)_{\overset{\lambda}{x_0}} = \left(\partial_{(\omega} \Pi^\lambda_{\mu\nu)}\right)_{\overset{\lambda}{x_0}} = \left(\partial_{(\varkappa} \partial_\omega \Pi^\lambda_{\mu\nu)}\right)_{\overset{\lambda}{x_0}} = \ldots = 0;$$

$$\left(\frac{\partial (x^\lambda)}{\partial (x^{\mu'})}\right)_{\overset{\lambda}{x_0}} = \delta^\lambda_{\mu'}.$$

Если s — аффинный параметр некоторого пути и $s = u^0/u^1$, то оказывается, что путь через $\overset{\lambda}{x_0}$ представим в форме $C^\lambda_0 u^0 + C^\lambda_1 u_1$, где C^λ_0 и C^λ_1 — постоянные. Автор показывает, что две нормальных координатных системы одной и той же точки так же, как и в случае пространства аффинной связности, связаны линейным преобразованием с постоянными коэффициентами. Если объект $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ симметричен, то с помощью нормальных координат можно определить, как и в случае многообразия аффинной связности, нормальный тензор и продолжение тензора. O. Varga

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 555.

6641. О пространствах проективной связности с однородными координатами, группы голономии которых сохраняют гиперквадрику. **Насу** (On the projectively connected spaces with homogeneous coordinates whose groups of holonomy fix a hyperquadric. Nasu Yasuo, Kumamoto J. Sci., 1953, **A1**, № 2, 1—7 (англ.)

Автор рассматривает многообразие с однородными координатами $x^0, x^1, \ldots, x^n$ и проективной связностью $\Pi^\alpha_{\mu\nu}$ в соответствии с теорией Схоутена, ван Данцига и Хантьеса (Schouten, van Damtzig, Haantjes) Группа голономии, принадлежащая этому многообразию, может переводить в себя невырожденную гиперповерхность Q_{n-1}, лежащую в касательном пространстве точки P и не содержащую P. При этих условиях автор показывает, что из $\Pi^\alpha_{\mu\nu}$ может быть выведена такая аффинная связность, параметры Γ^i_{jk} которой являются символами Кристоффеля тензора второго ранга. Этот тензор определяется гиперповерхностью Q_{n-1} и образует метрический тензор эйнштейнова пространства постоянной кривизны, не обращающейся в нуль. O. Varga

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 555.

6642. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. **Лаптев Г. Ф.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 60—62

Статья представляет собою резюме доклада, сделанного на Третьем Всесоюзном математическом съезде. В докладе дан обзор работ, выполненных теоретико-групповым методом дифференциально-геометрических исследований. Предметом изучения во всех этих работах является многообразие, вложенное в пространство представления конечной или бесконечной группы Ли. Исследования ведутся по единой схеме, разрабо-

танной автором (РЖМат, 1953, 433) для случая конечных групп и распространенной А. М. Васильевым (Диссертация, МГУ, 1952) на случай бесконечных групп. П. И. Швейкин

6643. Единая релятивистская теория гравитации и электромагнетизма. Эйзенхарт (A unified theory of general relativity of gravitation and electromagnetism. Eisenhart Luther P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 5, 249—251 (англ.)

Рассматривается вариант единой теории, включающей гравитационное и электромагнитное поля, для описания которых используются симметрический тензор g_{ij}, коэффициенты связности Γ^i_{jk} и электромагнитный вектор φ_i, определяющий кососимметрический тензор электромагнитного поля $F_{ij}=\varphi_{i,j}-\varphi_{j,i}=\varphi_{i;j}-\varphi_{j;i}$ (запятая означает частную производную, а; — ковариантную, выражающуюся через символы Кристоффеля $\left\{{i\atop jk}\right\}$ для метрики g_{ij}). Из определения F_{ij} следует, что $F_{[ij;\,k]}=F_{[ij,\,k]}=0$. Для любой связности $\Gamma^i_{jk}=\left\{{i\atop jk}\right\}+a^i_{jk}$ и a^i_{jk} — тензор. Рассматривая аффинный тензор кривизны Γ^i_{jhl}, отвечающий связности Γ^i_{jh}, получим, что

$$\Gamma^i_{jhl}=R^i_{jkl}+a^i_{jl;\,h}-a^i_{jh;\,l}+a^k_{jl}a^i_{kh}-a^k_{jh}a^i_{kl},$$

где R^i_{jkl} — тензор Римана. Свертывая по i и l, получим связь между тензором $\Gamma_{jh}\equiv\Gamma^i_{jhi}$, тензором Риччи и тензором $a^i_{ji;\,h}-a^i_{jh;\,i}+a^k_{ji}a^i_{kh}-a^k_{jh}a^i_{ki}$. Теперь для рассматриваемой теории, связность определяется требованием: $a^i_{jh}=F_{jh;\,l}g^{il}$, откуда дальнейшее свертывание приводит к выводу: $\Gamma_i\equiv\Gamma^j_{ij}=a^j_{ij}=0$. Симметрическая часть Γ_{jh} имеет вид $\Gamma_{jh}=R_{jh}+a^k_{ji}a^i_{kh}$. Таким образом основные уравнения рассматриваемого варианта единой теории будут иметь вид:

$$\Gamma_{jh}=R_{jh}-F^m_{j;\,l}F^l_{h;\,m}=0,$$

которые для чисто гравитационного поля приводятся к уравнениям гравитации Эйнштейна в пустоте $R_{jh}=0$.

Вектор, касательный к траектории частицы в таком поле, может быть единичным или изотропным: $g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=\begin{cases}\pm1\\0\end{cases}$, откуда при ковариантном дифференцировании получается уравнение (α):

$$g_{ij}\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{{i\atop hk}\right\}\frac{dx^h}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right)\frac{dx^j}{ds}=0,$$

которое удовлетворится, если скобка, умноженная на g_{ij}, равна $a_{jkm}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}$, где a_{jkm} — произвольный тензор, кососимметрический по jk, и поэтому ему нужно придать указанное выше значение. Это дает уравнения движения поля в виде:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{{i\atop jk}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=bF^i_{k;\,h}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^h}{ds}.$$

Но (α) можно также удовлетворить, предположив, что g_{ij}, умноженное на скобку, равно $a_{jk}\frac{dx^k}{ds}$, где a_{jk} — произвольный кососимметрический тензор. Поэтому, полагая $a_{jk}=bF_{jk}$ (b — физическая константа), можно взять за уравнения движения поля также

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{{i\atop jk}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=bF^i_k\frac{dx^k}{ds},$$

которые при $b=e/m$ приводят к классическим уравнениям Лоренца. А. З. Петров

6644. О теории гравитационных волн. Такено (On the theory of gravitational waves. Takeno Hyôitirô), Tensor, 1956, 6, № 1, 15—25 (англ.)

В известной работе Эйнштейна и Розена (Einstein A., Rosen N., J. Franklin Inst., 1937, № 223, 43—54) при использовании линеаризированных уравнений поля ($g_{ij}=e_{ij}+\gamma_{ij}$, где $e_{ij}=0$ ($i\neq j$), $e_{ii}=\pm1$ и γ_{ij} достаточно малы по сравнению с единицей) авторы пришли к выводу, что могут существовать в принципе 6 видов плоских волн, но только два из них не могут быть уничтожены за счет преобразования координат, и они определяют поперечные волны. Решение искалось в предположении, что: 1) $\gamma=\gamma(x-z)$, 2) $\Box\overset{*}{\gamma}_{ij}=0$, $\overset{*}{\gamma}_{ij}=\gamma_{ij}-\frac{1}{2}e_{ij}\omega$ ($\omega=e^{ij}\gamma_{ij}$) и 3) выполняются координатные условия $e^{ij}\partial_i\overset{*}{\gamma}_{kj}=0$. Автор ставит задачей исследование решений уравнений поля тяготения, определяющих конечные волны, т. е. для уравнений поля не линеаризированных, когда γ не будут малыми. Решение ищется также при координатных условиях, в качестве которых выдвигается требование, чтобы система координат была гармоническая: $\partial_i(\sqrt{-g}\,g^{ij})=0$ и, кроме того, предполагается, что $g_{ij}=g_{ij}(Z)$, $Z=x-z$. Интегрирование координатных условий приводит к общему решению в виде

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}\alpha&\gamma&\rho&-\rho\\ \gamma&\beta&\sigma&-\sigma\\ \rho&\sigma&1-\varphi-\psi&\varphi\\ -\rho&-\sigma&\varphi&-1-\varphi-\psi\end{pmatrix},\qquad(1)$$

где ρ, σ, φ, ψ, α, β, γ — произвольные функции Z при условии $\alpha\beta-\gamma^2=1$. Это последнее условие истолковывается физически. В частности, при $\rho=\sigma=\varphi=\psi=\gamma=0$ и $\alpha=\beta=1$ метрический тензор приводится к виду метрического тензора Минковского. Записывая для такой метрики уравнения поля и отбрасывая случаи кажущихся волн, от которых можно избавиться за счет преобразования координат, автор приходит к метрике, где ρ, σ, φ, ψ — произвольны, а $\alpha=1-i\delta$, $\zeta=1-\delta$, $\gamma=ei\delta$, $\delta=\delta(Z)$, что определяет цилиндрические волны. Метрика будет неплоской. Автор отмечает, что для (1) получается риманово пространство с рекуррентным тензором кривизны: $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}=v_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, где v_λ — градиент. А. З. Петров

6645. К вопросу о выборе метрики в единой теории. Фам Дань Хуан (Sur le choix de la métrique en théorie unitaire. Pham Tan Hoang), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 25, 1919—1921 (франц.)

При изучении характеристических многообразий уравнений поля единой теории Эйнштейна—Шредингера, Лихнеровичем (Les Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, Paris) было показано, что если двухвалентный тензор, определяющий поле, равен $g^{\alpha\beta}=h^{\alpha\beta}+f^{\alpha\beta}$, где $h^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}$, $f^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}$ — соответственно симметрическая и антисимметрическая части этого тензора, то гравитационное поле определяется тензором $b_{\alpha\beta}=Jh_{\alpha\beta}$, т. е. он определяется с точностью до инварианта J, если задан

тензор $g_{\alpha\beta}$. Доказывается, что, вводя изотермические координаты, этот инвариант может быть определен полностью. Основываясь на том, что в пространствах аффинной связности условие, определяющее изотермическую систему координат, имеет вид: $g^{\alpha\beta}L^{\mu}_{\alpha\beta}=0$, и, записывая аналогичное условие для метрики $b_{\alpha\beta}$, автор показывает, что $J=\sqrt{g:h}$, где g и h — детерминанты, определяемые соответствующими тензорами.

А. З. Петров

6646. **Проекции геодезических нулевой длины и электромагнитные лучи в непрерывно движущейся среде. Фам Мау Куан** (Projections des géodésiques de longueur nulle et rayons électromagnétiques dans un milieu en mouvement permanent. Pham Mau Quan), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 7, 875—878 (франц.)

В V_n с метрикой $ds^2=\gamma_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}\equiv\left(g_{\alpha\beta}-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\times\right.$ $\left.\times u_{\alpha}u_{\beta}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}$ ($\alpha,\beta=0,1,2,3$), где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор пространства-времени; u_{α} — вектор скорости, связанный с каждой точкой среды, а n характеризует среду, рассматриваются электромагнитные (световые) лучи, связанные с нулевыми геодезическими. Предполагается, что движущаяся среда непрерывна, пространство-время стационарно и что u_{α} и n инвариантны относительно группы изометрии пространства-времени. Это означает, что $\partial_0 g_{\alpha\beta}=\partial_0 u_{\alpha}=\partial_0 n=0$ (x^0 — временная координата) и $g_{00}>0$, $\gamma_{00}=g_{00}-(1-1/n^2)\,u_0^2>0$. Это позволяет рассматривать пространство V_3 с определенно-отрицательной метрикой $d\sigma^2=\left(g_{ij}-\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)\times$ $\times dx^i dx^j$ и исследовать проекции нулевых геодезических на это V_3. Доказывается теорема: если движущаяся среда непрерывна, то V_4^* стационарно и электромагнитные лучи V_3 определяются как линии, для которых интеграл

$$\int_{z_0}^{z_1}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{00}}}\sqrt{\hat{\gamma}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}-\frac{\gamma_{0i}\dot{x}^i}{\gamma_{00}}\right)du$$

будет экстремальным (ε определяет знак $\gamma_{00}\dot{x}^z$). Отсюда следует эквивалентность принципа геодезических и принципа наименьшего времени. В частности, рассматриваются статическое пространство-время, изученное Леви—Чивита. Для евклидова случая приходим непосредственно к принципу Ферма в оптике.

А. З. Петров

6647. **Определение присоединенных групп группы Галилея и некоторых ее подгрупп. Лети** (Determinazione dei gruppi aggiunti del gruppo di Galilei e di alcuni suoi sottogruppi. Leti Giuseppe), Collect. Math., 1954, 7, № 2—3, 121—140 (итал.)

В пространстве-времени специальной теории относительности рассматривается группа Галилея, состоящая из параллельных сдвигов $x_i'=x_i+\tau_i$ ($i=0,1,2,3$), движения со скоростью $\bar{\nu}$ (ν_1,ν_2,ν_3) $x_{\alpha}'=x_{\alpha}+\nu_{\alpha}x_0$ ($\alpha=1,2,3$) и вращений в пространстве (x_1,x_2,x_3) вокруг начала координат. Операторы этой группы $T_i=p_i$, $v_{\alpha}=x_0p_{\alpha}$, $R_1=x_2p_3-x_3p_2$, $R_2=x_3p_1-x_1p_3$, $R_3=x_1p_2-x_2p_1$, $\left(p_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$. Переходя к каноническим координатам в группе, автор получает выражение матриц бесконечно малых и конечных преобразований присоединенной группы в векторном пространстве алгебры Ли для всей группы Галилея и ее подгрупп — стационарной подгруппы $\{V_{\alpha},R_{\alpha}\}$ и группы вращений $\{R_{\alpha}\}$. Так, например, если обозначить $\bar{r}(r_1,r_2,r_3)$, $\bar{v}(v_1,v_2,v_3)$, $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2}$,

$$R=\begin{pmatrix}0&-r_3&r_2\\r_3&0&-r_1\\-r_2&r_1&0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0&-v_3&v_2\\v_3&0&-v_1\\-v_2&v_1&0\end{pmatrix},$$

то матрицы конечных преобразований присоединенной группы будут иметь вид

$$e^R=E+\frac{\sin r}{r}R+\frac{1-\cos r}{r^2}R^2$$

для группы вращений, и для группы $\{V_{\alpha},R_{\alpha}\}$:

$$e^G=\begin{pmatrix}e^R&M(r,v)\\0&e^R\end{pmatrix},$$

где

$$M(r,v)=\frac{1-\cos r}{r^2}\left(RV+VR-2\frac{\bar{r}\times\bar{v}}{r^2}R^2\right)+$$

$$+\frac{\bar{r}\times\bar{v}}{r^2}\,\frac{\sin r}{r}R^2+\frac{\bar{r}\times\bar{v}}{r^2}\left(\cos r-\frac{\sin r}{r}\right)R+\frac{\sin r}{r}V.$$

Г. И. Кручкович

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

6648. **Группы голономии многообразий с плоской аффинной связностью. Аусленде р, Маркус** (Holonomy of flat affinely connected manifolds. Auslander L., Markus L.), Ann. Math., 1955, 62, № 1, 139—151 (англ.)

На многообразия с локальной аффинной связностью распространяются известные результаты из теории локально евклидовых пространств (см., например, Картан Э., Геометрия римановых пространств, М.—Л., 1936). Для этих пространств изучаются группы голономии, фундаментальные группы и другие вопросы дифференциальной геометрии в целом.

Получены обобщения результатов Киллинга и Хопфа, относящихся к проблеме Клиффорда—Клейна на пространства, группа голономии которых равна нулю. Получена характеристика цилиндрического и торообразного пространства. Исследование ведется методами и в терминах теории расслоенных пространств (см., например, РЖМат, 1957, 5150). М. А. Акивис

6649. **Непрерывные бесконечные псевдогруппы. Чжэнь Шеншень** (Pseudo-groupes continus infinis. Chern Shiing-shen), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 52, Strasbourg, 1953, Paris 1953, 119—136 (франц.)

Опираясь на теорию расслоенных многообразий, автор делает попытку определить в целом некоторые основные понятия локальной теории бесконечных групп Э. Картана (Cartan E., Oeuvres complètes, part. II, vol. 2).

Рассматривается аналитическое многообразие M, покрытое системой окрестностей U_{α}. В каждой U_{α} задана система форм θ_{α}^i. На пересечении окрестностей эти системы преобразуются одна в другую подгруппой G линейной группы $GL(n,R)$: $\theta_{\alpha}^i=\theta_{\beta}^i g_{\alpha\beta}$. При помощи этих систем форм можно определить в целом систему форм ω^i на главном расслоенном многообразии B_G, порожденном M и G. Внешнее дифференциро-

вание ω^i дает уравнения, аналогичные структурным уравнениям Картана для нормальной бесконечной группы:

$$D\omega^i = a^i_{j\rho}(\omega^j\pi^\rho) + C^i_{jk}[\omega^j\omega^k]/2.$$

Формы π^ρ при $\omega^i = 0$ являются инвариантными формами G, для которой операторы

$$X_\rho = a^i_{j\rho}\xi^j\partial/\partial\xi^j$$

определяют линейное представление.

Коэффициенты $a^i_{j\rho}$ являются константами, а коэффициенты C^i_{jk}, после надлежащей канонизации их по Картану, являются инвариантами, определенными на B_G.

Если канонизированные C^i_{jk} являются константами, то G-структура называется интегрируемой. Если $a^i_{j\rho}$ образуют инволютивную систему, то G-структура называется инволютивной. Пусть G — инволютивная группа, основная проблема геометрии в целом состоит в установлении, имеет ли многообразие M структуру G и имеет ли оно интегрируемую структуру G.

Автор иллюстрирует общие соображения рядом примеров, ссылаясь на работы Э. Картана и др.

Г. Ф. Лаптев

6650. Об одном свойстве в целом геодезических финслерова пространства. Букур (Asupra unei proprietaţi globale a linlilor geodezice ale unui spaţiu Finsler. Bucur I.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 6, 965—968 (рум.; рез. русск., франц.)

Серр доказал следующую теорему: Каждые две точки компактного достаточно гладкого риманова многообразия можно соединить бесконечным числом геодезических дуг (Serre J.-P., Ann. Math., 1951, 54, 425—505). Автор распространяет этот результат на случай положительно регулярной финслеровой метрики.

А. И. Фет

6651. Краткое изучение бирационального преобразования комплексного S_5, определяемого бидуальным квадратичным преобразованием. Бальсимелли (Breve studio di una trasformazione birazionale dell'S_5 complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale. Balsimelli P.), Rend. Accad. sci., fis., mat. Napoli (1952), 19, 171—174 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

6652. О якобиевых многообразиях мероморфных функций на компактном комплексном многообразии. Везентини (Sugli jacobiani di funzioni meromorfe sopra una varietà complessa compatta. Vesentini Edoardo), Atti Accad. naz. lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955 (1956), **19**, № 6, 428—434 (итал.)

Пусть S — неприводимая неособая гиперповерхность m-мерного комплексного компактного многообразия M. Пусть на M задана мероморфная функция F такая, что если $F = \psi/\varphi$ — ее локальное представление в виде отношения двух взаимно простых голоморфных функций, то $\varphi = 0$ есть минимальное локальное уравнение поверхности S. Предполагается, что множество точек неопределенности функции F есть неособое подмногообразие размерности $m-2$, фундаментальный класс гомологий которого есть пересечение $S \cap S$, а все прочие особые точки этой функции являются обыкновенными двойными точками для проходящих через них поверхностей постоянного уровня функции F, причем каждая такая поверхность не может иметь больше одной двойной точки. Дается формула, выражающая число поверхностей уровня, имеющих двойные точки, через классы Чжэня многообразия M и класс гомологий S. Автор намечает доказательство этой формулы и указывает, что его рассмотрения могут быть обобщены на случай нескольких мероморфных функций, а также применены к изучению изолированных стационарных точек голоморфных форм.

А. Л. Онищик

6653. Некоторые локальные и глобальные свойства гармонических римановых пространств. Уилмор (Quelques propriétés locales et globales des espaces riemanniens harmoniques. Willmore Thomas I.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 89—95 (франц.)

Обзор основных результатов теории гармонических римановых пространств — таких римановых пространств, в которых уравнение Лапласа

$$\Delta_2 V = g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\alpha\beta}V - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\partial_\rho V\right) = 0$$

допускает решение, являющееся функцией только геодезического расстояния S переменной точки M от начальной точки M_0.

Класс гармонических римановых пространств является более общим, чем класс римановых пространств постоянной кривизны, но более специальным, чем класс пространств Эйнштейна.

Изучение теории гармонических пространств в целом показывает ее тесную связь с теорией групп Ли. Компактные связные многообразия, допускающие гармоническую метрику, являются однородными пространствами. Ставится вопрос о получении характеристики гармонических римановых пространств при помощи их тензора кривизны, аналогичной известной характеристике $\nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, полученной Э. Картаном для симметрических пространств.

Приводится далее ряд результатов о первом числе Бетти компактных многообразий, допускающих гармоническую метрику.

М. А. Акивис

6654. О почти комплексных структурах и других регулярных инфинитезимальных структурах. Либерман (Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières. Libermann Paulette), Bull. Soc. math. France, 1955, **83**, № 3, 195—224 (франц.)

Обзор современных работ в стиле французской школы по так называемым инфинитезимальным структурам. Речь идет о расслоенном многообразии $T(V_n, R^n, L_n, H)$, которое является многообразием векторов, касательных к дифференцируемому n-мерному многообразию V_n. При этом R^n есть n-мерное векторное пространство; L_n — полная линейная однородная группа; $H(V_n)$ — присоединенное главное расслоенное пространство гомеоморфизмов (реперов) h_x, отображающих R^n на касательное пространство T_x к V_n в точке x, пробегающей V_n.

Основной целью исследований является разыскание и изучение подчиненных G-структур, т. е. расслоенных многообразий $T(V_n, R^n, G, H')$, у которых структурная группа G есть подгруппа L_n.

В статье излагаются многочисленные исследования локального и интегрального характера, относящиеся к структурам почти комплексным, почти симплектическим, почти эрмитовым, почти кватернионным, а также к структурам почти паракомплексным, почти кватернионным 2-го рода, почти параэрмитовым (РЖМат, 1957, 864).

Наиболее интересными из перечисленных в статье результатов являются те, которые относятся к дифференциальной геометрии в целом. Например, из всех сфер только S_2 и S_6 допускают почти комплексную структуру (Борель и Серр). Четномерные числа Бетти симплектического пространства отличны от нуля (Де Рам) и т. д.

Библ. 85 назв.

Г. Ф. Лаптев

6655. Некоторые геометрические иллюстрации унитарного пространства Эйнштейна. Бринис (Qualche illustrazione geometrica dello spazio unitario di Einstein. Brinis Elisa), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1955, 88, № 2; 531—538 (итал.)

Работа представляет собою дополнение к работе Марии Пастори (РЖМат, 1957, 5908). Основное внимание уделяется изложению уже опубликованных данных. Рассматривается унитарное пространство Эйнштейна, возникшее как средство создать единую теорию гравитационного и электромагнитного полей. Это четырехмерный континуум с заданным несимметрическим фундаментальным тензором g_{ik} и несимметрической аффинной связностью Γ^j_{ih}.

Первый параграф посвящен вопросу о бесконечно малых циклах, при параллельном переносе (Bompiani). Второй параграф посвящен вопросу о сохранении скалярного произведения при параллельном переносе (Pastori).

В третьем параграфе уточняются условия, при которых сохраняется модуль вектора при параллельном переносе. Библ. 9 назв. Р. И. Пименов

6656. Инвариантные подпространства в почти комплексном X_{2n}. Схоутен, Яно (On invariant subspaces in the almost complex X_{2n}. Schouten J. A., Yano K.), Proc. Koninkl. nederl. acad. wetensch., 1955, **A58**, № 3, 261—269; Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 261—269 (англ.)

Работа относится к циклу работ авторов, посвященных изучению дифференцируемых многообразий X_{2n} с почти комплексной структурой (РЖМат, 1956, 6116, 6819).

Рассматриваются многообразия X_{2m}, вложенные в X_{2n}, инвариантные относительно тензора F_i^h, задающего почти комплексную структуру на многообразии X_{2n}. Доказывается, что инвариантное многообразие X_{2m} в почти комплексном X_{2n} само является почти комплексным.

Аналогичные предложения доказываются для инвариантных многообразий, вложенных в псевдокомплексные, почти и псевдоэрмитовы и почти и псевдокелеровы X_{2n}.

В почти комплексном X_{2n} рассматривается линейная связность и доказывается, что симметрическая линейная связность, удовлетворяющая условию $\nabla_j F_i^h = 0$, существует в X_{2n} тогда и только тогда, когда это X_{2n} является псевдокомплексным.

Если X_{2m} вложено в почти комплексное X_{2n} с линейной связностью, то на X_{2m} линейная связность индуцируется только в том случае, если оно оснащено. Если же инвариантное X_{2m} вложено в почти эрмитово X_{2n}, то на нем имеется внутренняя связность причем она совпадает со связностью, индуцированной на этом многообразии внутренней связностью пространства X_{2n} при помощи ортогонального оснащения.

На многообразии X_{2m}, вложенном в почти эрмитово X_{2n} определяется вектор средней кривизны M^*, обращение в нуль которого означает, что это многообразие является минимальным. Доказывается, что всякое инвариантное X_{2m} в почти келеровом X_{2n} является минимальным.

В почти эрмитовом пространстве X_{2n} определяется вектор девиргенции пространства $Z^h = \overset{\circ}{\nabla}_i F^{ih}$, где $F^{ih} = g^{ij} F_j^h$, g_{ij} — метрический тензор пространства X_{2n} и $\overset{\circ}{\nabla}_i$ обозначает ковариантную производную относительно внутренней связности этого пространства. Оказывается, что в почти келеровом X_{2n} дивергенция пространства равна нулю и бивектор F^{ih} является гармоническим.

В заключение доказывается следующая теорема.

Пусть в эрмитовом X_{2n} дана нормальная система инвариантных X_{2m} и нормальная система $X_{2m'}$, $m + m' = n$, ортогональных ко всем X_{2m}. Если дивергенция пространства равна нулю и дивергенция многообразий X_{2m} также равна нулю, то многообразия $X_{2m'}$ будут минимальными, и наоборот. Если многообразия X_{2m} и $X_{2m'}$ минимальны и дивергенция этих многообразий равна нулю, то, дивергенция пространства X_{2n} равна нулю. М. А. Акивис

6657. О почти комплексных однородных пространствах. Легран (Sur les espaces homogènes presque complexes. Legrand Gilles), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 21, 2044—2046 (франц.)

Пусть на многообразии V_{2n} транзитивно и эффективно действует связная группа G, причем стационарная подгруппа компактна, и пусть на V_{2n} задана почти эрмитова структура, инвариантная относительно группы G. Риманова связность на многообразии V_{2n} индуцирует некоторую почти эрмитову связность. Пусть σ — однородная связная группа голономии, Ω^α_β — формы кривизны этой связности, $\tilde{H}$ — линейная группа изотропии. Можно считать, что σ и $\tilde{H}$ являются подгруппами группы $U(n)$. Допустим, что $n > 1$, а $\tilde{H}$ связна и неприводима. Тогда оказывается, что если $\tilde{H} \subset SU(n)$, то и $\sigma \subset SU(n)$, а если V_{2n} компактно, то верно и обратное утверждение. Доказательство основано на рассмотрении внешней формы 2-го порядка $\Psi = i\Omega^\alpha_\alpha$, которая равна 0 тогда и только тогда, когда $\sigma \subset SU(n)$. А. Л. Онищик

6658. Точечные преобразования между двумя пространствами, содержащие только одну конгруэнцию характеристических кривых. Мураккини (Trasformazioni puntuali fra due spazi che posseggono un'unica congruenza di curve caratteristiche. Muracchini Luigi), Univ. e Politecn. Torino. Rend. Sem. mat., 1953, **12**, 159—176 (итал.)

В преобразовании между двумя проективными пространствами S_3, $\bar{S}_3$ в регулярной паре гомологичных точек A, $\bar{A}$ существует семь характеристических прямых — базисных образующих сети кубических конусов (с вершинами A или $\bar{A}$). Может случиться, и притом четырьмя проективно различными способами, что семь характеристических прямых совпадают. Автор рассматривает среди типов точечных преобразований, реализующих указанное совпадение, те, числом три, для которых имеется совпадение характеристических прямых поверхности возврата (второго порядка) конуса. Он дает проективно-геометрические конструкции этих преобразований, основанные на совокупности формул и свойств, установленных для общих точечных преобразований между проективными S_r, которые имеют самостоятельный интерес и делают возможным, например, локальное изучение, с точностью до окрестности третьего порядка, преобразований, обладающих свойствами, относящимися к окрестности первого порядка любой пары гомологичных точек. Использованный метод исследования есть метод инфинитезимальных смещений подвижного проективного репера Е. Картана. P. Vincensini

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 742.

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

6659. Замечание о рациональных точках. Нисимура (Some remarks on rational points. Nishimura Hajime), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, **A29**, № 2, 189—192 (англ.

Доказывается, что если над общим полем определения k заданы абстрактные многообразия U, V (из которых V — полное) и рациональная функция на U со значениями на V, и если U содержит простую рациональную точку, то V также содержит рациональную точку. Пример бирационально эквивалентных поверхностей $U: x^4+ux^2+vy^2+wz^2=0$ (в S_3) и $V: x^2+ut^2+vy^2+wz^2=0$ (в проективном пространстве) показывает, что требование простоты рациональной точки на U существенно, так как здесь V вообще не содержит рациональных точек. В. В. Морозов

6660. Некоторые обобщения понятия чебышевского альтернанса. Зуховицкий (Деякі узагальнення поняття чебишовського альтернансу. Зуховицький С. І.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 5, 419—424 (укр.; рез. русск.)

Точка (плоскость) называется внутренней относительно данного n-мерного симплекса, если все $n+1$ ее расстояний от граней (вершин) симплекса отличны от нуля и при каждом достаточно малом сдвиге этой точки (плоскости) хотя бы одно из этих расстояний увеличивается.

Используя идеи своего алгорифма для решения некоторых чебышевских задач (РЖМат, 1954, 2350), автор получает критерий для определения внутренних точек (плоскостей) относительно данного симплекса. Г. Ш. Рубинштейн

6661. О симметрии. Курепа (On the symmetry. Kurepa Duro), Glasnik mat.-fiz. i. astron., 1955, **10**, № 4, 239—254 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Точки A и B называются симметрическими по отношению к линейному подпространству Y евклидова n-мерного пространства R^n, если: 1) отрезок $AB\perp Y$ 2) $AB\cap Y$ — середина AB. Если X — заданное множество точек R^n, тогда S_kX есть совокупность всех k-мерных подпространств Y пространства R^n таких, что по отношению к любому из них X разбивается на пары AB, симметричные по отношению к Y. S_0X, S_1X, S_2X суть совокупности всех центров, всех прямых, всех плоскостей симметрии X. Доказывается теорема I о совокупности S_0A всех центров симметрии алгебраической поверхности A в R^n, т. е. совокупности A точек, удовлетворяющих одному уравнению вида

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{n} a_{i_1 i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}=0;$$
$$(0\leqslant i_1+\ldots+i_n\leqslant m).$$

S_0A есть линейное подпространство R^n и всякое линейное подпространство S_0A есть элемент симметрии A. A есть совокупность линейных подпространств, получаемых из S_0A параллельными переносами.

Теорема II. Если $\alpha(x)$ многочлен от x и есть $y_1\neq y_2$ такие, что $\alpha(x+y_i)=\alpha(-x+y_i)$; $(i=1,2)$, то $\alpha(x)$ постоянная. Б. Н. Делоне

6662. Полные квадратичные примали в четырехмерном пространстве. Алгунейд (Complete quadric primals in four-dimensional space. Alguneid A. R.), Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 1952 (1953), **4**, № 4, 93—104 (англ.)

Работа эта — более или менее непосредственное обобщение первой заметки референта о полных квадриках в S_3 (J. London Math. Soc., 1948, **23**, 258—267) на квадратичные примали в S_4 со значительно более сложными алгебраическими выкладками. Полная квадрика в S_4 должна быть специализирована каждым из четырех следующих способов: как место Q_0, как комплекс касательных линий Q_1, как комплекс касательных плоскостей Q_2 и как огибающая прим Q_3. Если Σ — 4-кратное (*4-way*) пространство, представляющее (с точностью до скалярных множителей) произвольные четверки симметрических матриц порядков 5, 10, 10, 5, соответственно, то производящая полная квадрика однозначно определяется точкой из Σ, изображающей четверку, первый член которой (матрица Q_0) имеет неопределенные элементы, а второй, третий и четвертый — первая и вторая компоненты и присоединенная для первого. Совокупность полных квадрик в S_4 задается 4-кратно неприводимым многообразием W_{14} в Σ, для которого указанная выше точка — производящая. Автор находит уравнения W_{14} в Σ — это набор соотношений (R), линейных относительно элементов каждой из четырех матриц и полностью характеризующий производящую точку W_{14}. Специализация приводит его к установлению 15 типов вырождающихся полных квадрик в S_4, Когда W_{14} обычным образом свертывается в одностороннее многообразие Ω_{14} на многообразии Сегре (модель полных квадрик в S_4 в обычном смысле), то показано, что Ω_{14} и его 15 подмногообразий вырождения — все неособенные и что четыре из этих последних пересекаются простым образом (как попарно, так и по три и все вместе) в одиннадцати остальных. J. G. Semple

Перевод из Math. Rews, 1954, **15**, № 4, 343.

6663. Многообразие в комплексном проективном пространстве, определенное упорядоченной тройкой гиперповерхностей пространства. Спампинато (Varietà determinata da una terna ordinata di ipersuperficie dell'S_r complesso nell'S_{3r+2}. Spampinato Nicolo), Ricerche mat., 1954, **3**, № 1. 13—30 (итал.)

Пусть A — коммутативная и ассоциативная алгебра ранга m над полем комплексных чисел. Пусть $S_r(A)$ — проективное пространство размерности r над алгеброй A и

$$F(\xi_1,\ldots,\xi_{r+1})=0 \qquad (1)$$

— уравнение гиперповерхности в $S_r(A)$ с коэффициентами из A (общий случай) или с комплексными коэффициентами (простой случай). Выражая в (1) коэффициенты через базис $e_1,\ldots,e_m$ алгебры и полагая $\xi_i=x_ie_i+y_ie_2+\ldots+t_ie_m$, получаем после преобразований уравнение $F_1(x_1,y_1,\ldots,t_{r+1})e_1+F_2e_2+\ldots+F_me_m=0$ или эквивалентную ему систему уравнений

$$F_1(x_1,y_1,\ldots,t_{r+1})=0,\ F_2=0,\ \ldots,\ F_m=0. \qquad (2)$$

Система (2) определяет в комплексном проективном пространстве S_N $(N=m(r+1)-1)$ многообразие V, которое в статье и изучается для случая $m=3$. В первой части A — алгебра с таблицей умножения

$$e_1^2=e_1,\ e_2^2=e_3^2=0,\ e_1e_2=e_2,\ e_1e_3=e_3,\ e_2e_3=0.$$

В этом случае система (2) имеет вид

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases} f(x_1,x_2,\ldots,x_{r+1})=0, & (\mathrm{I}_1)\\ \sum_{i=1}^{r+1}\frac{\partial f}{\partial x_i}y_i+g(x_1,\ldots,x_{r+1})=0, & (\mathrm{I}_2)\\ \sum\frac{\partial f}{\partial x_i}z_i+h(x_1,\ldots,x_{r+1})=0, & (\mathrm{I}_3)\end{cases}$$

где f, g, h — формы степени n (общий случай) или f — форма степени n, $g \equiv n \equiv 0$ (простой случай). r-мерные пространства $y_i = z_i = 0\ (i = 1, \ldots, r+1)$, $x_i = z_i = 0\ (i = 1, \ldots, r+1)$, $x_i = y_i = 0\ (i = 1, \ldots, r+1)$ обозначены соответственно S'_r, S''_r, S'''_r.

Установлено: Пересечение гиперконусов, уравнения которых (I_1) и (I_2) состоят из ∞^{r-1} линейных подпространств S_{2r+1}, проходящих через вершину S'''_r второго гиперконуса и высекающих в вершине S''_r третьего гиперконуса ∞^{r-1} гиперплоскостей S_{r-1}, каждая из которых касается гиперповерхности $f(y_1, \ldots, y_{r+1}) = 0$ пространства S''_r. Параметрические уравнения образующей S_{2r+1}

$$x_i = \lambda x'_i,\ y_i = \lambda_i,\ z_i = \mu_i\ (i = 1, \ldots, r+1), \qquad (3)$$

где $x'_1, \ldots, x'_{r+1}$ удовлетворяют уравнению (I_1), а $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$ подчинены условию

$$\sum \frac{\partial f(x')}{\partial x'_i}\lambda_i + g(x')\lambda = 0. \qquad (4)$$

Аналогичный результат относительно пересечения первого и третьего гиперконусов. Многообразие V_{3r-1} порядка n^3, определенное системой I, состоит из ∞^{r-1} образующих S_{2r}, уравнения которых $x_1 : x_2 : \ldots : x_{r+1} = x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_{r+1}$

$$\sum \frac{\partial f(x')}{\partial x'_i} y_i + g(x')\frac{x_1}{x'_1} = 0, \quad \sum \frac{\partial f(x')}{\partial x'_i} z_i + h(x')\frac{x_1}{x'_1} = 0,$$

где $x'_1, \ldots, x'_{r+1}$ удовлетворяют (I_1) и $x'_1 \neq 0$. В простом случае дается другой способ определения образующей. Во второй части A — алгебра с таблицей умножения $e_1^2 = e_1, e_1e_2 = e_2, e_2^2 = e_3, e_2^3 = 0$. В этом случае уравнение (I_3) системы (I) заменяется уравнением

$$(II_3) \quad \sum_{i=1}^{r+1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} z_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r+1} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j + \sum_{i=1}^{r+1} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} y_i + h(x) = 0.$$

Доказывается: многообразие V_{3r-1} порядка n^3, определенное уравнениями (I_1), (I_2) и (II_3), состоит из ∞^{r-1} образующих гиперквадрик V_{2r}, каждая из которых задается относительно однородных параметров $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}, \mu_1, \ldots, \mu_r$ уравнениями

$$x_i = x'_i E(\lambda) D(\lambda),$$
$$y_i = -g(x') D(\lambda)\lambda_i, \quad i = 1, \ldots, r+1,$$
$$z_j = -g(x') D(\lambda)\mu_j, \quad j = 1, \ldots, r,$$
$$z_{r+1} = \left[g(x') F(\lambda) F^*(\mu) + \frac{1}{2} g^2(x') F^2(\lambda) + g(x') F(\lambda) G(\lambda) + h(x') F^2(\lambda) \right] g(x'),$$

где $x'_1, \ldots, x'_{r+1}$ удовлетворяют (I_1) и $F(\lambda) = \sum_1^{r+1} \frac{\partial f(x')}{\partial x'_i}\lambda_i$, $F^{(2)}(\lambda) = \sum \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_i \partial x'_j}\lambda_i\lambda_j$, $G(\lambda) = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{\partial g(x')}{\partial x'_i}\lambda_i$, $F^*(\mu) = \sum_1^r \frac{\partial f}{\partial x'_i}\mu_i$, $D(\lambda) = g(x')F(\lambda)\frac{\partial f(x')}{\partial x'_{r+1}}$.

V_{2r} оказывается конусом, вершина которого — гиперплоскость в S'''_r, касающаяся многообразия $f(z_1, \ldots, z_{r+1}) = 0$ в точке $z_i = x_i$. В простом случае образующий конус пересекает S'_r в точке $P'(x')$ и задается относительно $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_{r+1}$ уравнением

$$\left(\sum \frac{\partial f(x')}{\partial x'_i}\mu_i \right) \left(\frac{\partial f(x')}{\partial x'_{r+1}} \right)^2 \lambda + \frac{x'_1}{2} \left[\left(\sum_1^r \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_i \partial x'_j}\lambda_i\lambda_j \right) \times \left(\frac{\partial f(x')}{\partial x'_{r+1}} \right)^2 - \left(\sum_1^r \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_i \partial x'_{r+1}}\lambda_i \right) \frac{\partial f(x')}{\partial x'_{r+1}} F^*(\lambda) + \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'^2_{r+1}} F^*(\lambda)^2 \right] = 0.$$

Г. И. Клейнерман

6664. Представление ельмслевой проективной инфинитезимальной геометрии. Фабрициус-Бьерре (Eine Darstellung von J. Hjelmslevs projektiver Infinitesimalgeometrie. Fabricius-Bjerre F r.). Acta math., 1956, 95, № 1—2, 111—154 (нем.)

Основные понятия реферируемой статьи были введены Ельмслевом (Hjelmstev J., Infinitesimale Elemente im projektiven Raum. 9. skand. Mat. kongres, beretn. Helsingfors, 1938). Кроме того, автор использовал две посмертные рукописи Ельмслева (Grundlagen der projektiven Infinitesimalgeometrie, 1950).

1. Элементы первого порядка. На произвольной (параметрической) кривой k_0 берутся точки T и T' и на касательной t в T — точки T_1, T_2, на секущей $t' = TT'$ — точки T'_1, T'_2. При $T' \to T$ точки T'_1, T'_2 стремятся к T_1 и T_2. На исследуемой кривой k посредством отображения $P' = \varphi(T')$ наносятся точки $P, P'P'_1, P'_2, P_2$ и касательная p (P'_1 и P'_2 на секущей P, P', а P_2 — на касательной p).

$$PP'P'_1P'_2 \overline{\wedge} TT'T'_1T'_2. \qquad (1)$$

Если при $T' \to T$ точка P'_1 стремится к определенной точке P_1 на p, то φ называется инфинитезимально проективной в точке T (инф. пр.). Тройки точек $T'T_1T_2$ и PP_1P_2 называются производными элементами первого порядка к текущим точкам T' и P'. Элемент называется обыкновенным, если все его точки различны, в противном случае — особым. По определению элемент TT_1T_2 обыкновенный. Выбор точек T_1, T_2, P_2, T'_1, T'_2, P'_2 (точка P'_1 определяется равенством (1)) не влияет на то, является ли φ инф. пр. или нет. Не важно также, каким образом точка P'_2 стремится к P_2.

2. Элементы второго порядка. При $P' \to P$ точка P'_1 описывает кривую, проходящую через P_1. Производный элемент $P_1P_{11}P_{12}$, построенный для этой кривой в точке P_1, называется элементом второго порядка кривой k в точке P. Точка P'_{11} выбирается так, чтобы $P_1P'_1P'_{11}P'_{12} \overline{\wedge} PP'P'_1P'_2$.

Если отображение $p' = \Psi(P')$, где p' — секущая PP', есть инф. пр., то элемент $PP_1P_2pp_1p_2$, состоящий из трех точек и из трех прямых, называется элементом

кривизны кривой k в точке P. В зависимости от Ψ кривизна может быть обыкновенной (прямые p, p_1, p_2 различны), равной нулю или ∞ (p_1 совпадает с p или p_2).

3. Так же определяются элементы третьего и высших порядков. Беря отображение $\pi' = \chi(P')$, где π' — плоскость, определяемая прямыми p и p', можно ввести элемент кручения $PP_1P_2\pi\pi_1\pi_2$ и т. д.

Дается истолкование этих элементов в аффинном и метрическом пространствах.

Доказывается ряд предложений о связи между отображениями параметрической кривой k_0 на две кривые k_1 и k_2. Если кривые k_1 и k_2 расположены на одной поверхности, то доказывается предложение, аналогичное теореме Менье.

Последние параграфы работы посвящены отображению поверхностей. Оно называется инф. пр., если осуществляет инф. пр. отображение двух каких-либо сетей кривых, нанесенных на этих поверхностях.

Н. И. Кованцов

6665. Линейчатая геометрия вырожденных неевклидовых пространств. Железина И. И., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 6, 959—962

Изучаются трехмерные вырожденные неевклидовы пространства Π_3, ${}^1\Pi_3$, ${}^2\Pi_3$, ${}^3\Pi_3$. Абсолюты их соответственно состоят: из пары мнимых плоскостей и пары мнимых точек, из пары мнимых плоскостей и пары вещественных точек, из пары вещественных плоскостей и пары мнимых точек, из пары вещественных плоскостей и пары вещественных точек.

Приводятся матрицы коллинеаций, являющихся движениями этих пространств. Многообразия всех прямых пространств Π_3, ${}^1\Pi_3$, ${}^2\Pi_3$, ${}^3\Pi_3$, за исключением прямых, пересекающих абсолютную прямую, можно взаимно однозначно отобразить в первом случае на двойную плоскость $R_2(e)$, во втором и третьем случаях на плоскость $R_2(i)$ и в четвертом случае на плоскость ${}^1R_2(e)$, причем группы движений пространств Π_3, ${}^1\Pi_3$, ${}^2\Pi_3$, ${}^3\Pi_3$ изоморфны группам движений соответствующих плоскостей $R_2(e)$, $R_2(i)$ и ${}^1R_2(e)$. Плоскость $R_2(e)$ — обычная евклидова плоскость, где вещественные координаты заменены двойными числами. Аналогично определяются и плоскости $R_2(i)$ и ${}^1R_2(e)$. Группы движений пространств Π_3, ${}^1\Pi_3$, ${}^2\Pi_3$, ${}^3\Pi_3$ двузначно изображаются в первом случае группой двойных полукватернионов модуля 1, во втором и третьем случаях — группой комплексных полукватернионов модуля 1 и в четвертом случае группой двойных полуантикватернионов модуля 1 и i.

М. А. Джавадов

6666. Аффинные булевы геометрии; векторное и матричное исчисление над булевыми алгебрами. Андреоли (Geometrie booleane affini; calcolo matriciale e vettoriale su Algebre di Boole. Andreoli G.), Giorn. mat. Battaglini, 1955, 83, № 2, 137—156 (итал.)

Определяются векторы и матрицы над булевыми алгебрами. Эти векторы и матрицы можно представить в виде линейных комбинаций, соответственно, векторов и матриц, координаты или элементы которых являются только нулевым элементом N и полным элементом T булевой алгебры, а коэффициентами разложения являются элементы, непосредственно следующие за нулевым элементом («атомы»). Обычные соотношения ортогональности матриц в случае булевых алгебр определяют «ортонормальные матрицы». Показывается, что обратной матрицей для ортонормальной матрицы является транспонированная матрица и что произведение ортонормальных матриц является ортонормальной матрицей. Вектор, у которого произведение любых двух координат есть N, а сумма всех координат есть T, называется «ортонормальным вектором»; показывается, что ортонормальная матрица переводит ортонормальные векторы в ортонормальные векторы.

Б. А. Розенфельд

6667. О топологическом значении некоторых дифференциальных уравнений второго порядка. Бомпьяни (Sul significato topologico di certe equazioni differenziali del secondo ordine. Bompiani Enrico), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, 23, № 2, 352—356 (итал.)

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$v'' P_s(v') = P_{s+3}(v'),$$

где $v' = dv/du$, а P_s, P_{s+3} — многочлены соответственно степеней s, $s+3$; коэффициенты этих многочленов являются функциями от u, v. Проходящее через точку O (которая для удобства принимается за начало координат плоскости u, v) решение этой системы, удовлетворяющее условию $v'|_{u=0} = k$, имеет вид $v = ku + \mu u^2 + [3]$, где $[3]$ — величина третьего порядка малости, а μ определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{P_{s+3}}{P_s}\Big|_{u=v=0,\ v'=k}.$$

Автор показывает, что преобразованием координат вида $u = \alpha\bar{u} + \ldots$, $v = \alpha\bar{v} + \ldots$ можно уничтожить четыре старших коэффициента в числителе, т. е. получить в новых координатах $\bar{u}$, $\bar{v}$ выражение

$$\mu = \frac{Q_{s-1}(k)}{Q_s(k)}; \qquad (1)$$

при надлежащем выборе числа α старшие коэффициенты обоих многочленов Q_{s-1}, Q_s можно сделать равными единице (если только степень числителя не окажется ниже, чем $s-1$). Координаты, в которых для μ справедливо в точке выражение (1), не единственны: если система координат (u, v) обладает этим свойством, то и система $(\bar{u}, \bar{v})$, связанная с (u, v) формулами

$$u = \frac{\bar{u}}{1 + m\bar{u} + n\bar{v}} + [3], \quad v = \frac{\bar{v}}{1 + m\bar{u} + n\bar{v}} + [3],$$

обладает (при любых m, n) тем же свойством. Дана интерпретация этих фактов в проективных координатах.

В формулах 3.5 ошибка (поправимая): не учтены коэффициенты при p^{s-1}, p^{s-2}, p^{s-3} многочлена $P_s(v')$.

В. Г. Болтянский

6668 К. Геометрия геодезических. Буземан (The geometry of geodesics. Busemann Herbert. New York, Acad. Press Inc., 1955, VII, 422 pp., ill.) (англ.)

Монография, посвященная некоторым вопросам метрической геометрии. Класс изучаемых в ней метрических пространств, называемых автором G-пространствами (G — начальная буква слова «геодезическая»), определяется свойствами их геодезических так, чтобы теория этих пространств была применима к финслеровым пространствам, изучение которых чисто геометрическими методами (в противовес аналитическим, например, тензорным) является основной целью книги. Такой подход дает возможность не только освободиться от несущественных условий дифференцируемости и распространить на финслеровы пространства многие положения, относящиеся к римановым геометриям, но и получить такие теоремы для пространств Финслера, которые были неизвестны и для римановых пространств.

Приводим определение G-пространств. Множество R (элементы которого называются точками) называется

G-пространством, если выполнены следующие условия: 1. Множество R-метрическое пространство, причем расстояние между точками x и y подчинено требованиям $xx=0$, $xy=yx>0$ при $x\neq y$, $xy+yz\geqslant xz$. Запись (xyz) обозначает, что $xy+yz=xz$. 2. Любое ограниченное множество точек из R имеет по меньшей мере одну точку сгущения в R 3. Для любых x и z существует y со свойством (xyz) (выпуклость в смысле Менгера).

4. Каждой точке p соответствует число ρ_p, $\infty\geqslant\rho_p>0$ такое, что для любых x и y из сферы $S(p, \rho_p)$ радиуса ρ_p с центром p найдется точка z со свойством (xyz) (локальная продолжимость геодезических). 5. Если (xyz_1) и (xyz_2) и выполнено равенство $yz_1=yz_2$, то $z_1=z_2$ (единственность продолжения геодезической).

Книга состоит из шести глав: 1. Основные понятия. 2. Дезарговы пространства. 3. Перпендикуляры и параллели. 4. Накрывающие пространства. 5. Влияние знака кривизны на геодезические. 6. Однородные пространства.

В первой главе, кроме определения и первоначального изучения основных понятий (кривые, дуги, сегменты, геодезические, движения и т. п.), ставится вопрос о топологии G-пространств (топология индуцирована метрикой и подчинена условию 2). Показано, что конечномерное G-пространство имеет во всех точках одинаковую размерность. Двумерные G-пространства являются топологическими многообразиями. Для G-пространств большей размерности тот же вопрос остается открытым. Получен следующий результат, относящийся к решению обратной задачи вариационного исчисления: если в евклидовой плоскости с евклидовой метрикой $e(x, y)$ дана система кривых Σ такая, что A) каждая кривая представима как $p(t)$, $-\infty<t<\infty$, причем $p(t_1)\neq p(t_2)$ при $t_1\neq t_2$, и $e(p(0), p(t))\to\infty$ при $|t|\to\infty$; B) через любые две точки проходит единственная кривая Σ, то плоскость можно метризовать (как «прямое» G-пространство), так что Σ будут геодезическими.

В следующих двух главах имеется много результатов, относящихся к характеристике специальных метрик (со свойством дезарговости, метрики Минковского и т. д.).

В четвертой главе вопрос о накрывающих пространствах для G-пространства трактуется не с общей топологической, а со специальной метрической точки зрения: G-пространство $\bar{R}$ называется накрывающим для G-пространства R, если существует локально изометрическое отображение Ω пространства $\bar{R}$ на R. Доказывается существование единственного с точностью до изометрии универсального накрывающего пространства. Получается много конкретных результатов, относящихся к различным классам пространств.

В пятой главе знак кривизны G-пространства связывается с величиной средней линии малого геодезического треугольника (для пространств отрицательной кривизны она короче третьей стороны), а также с выпуклостью эквидистант малых сегментов. Получаются результаты, связывающие топологические свойства пространства с возможными его метризациями.

В той же главе вводится угловая мера и рассматривается избыток (разность между суммой углов и π) треугольника.

Последняя глава посвящена пространствам, по крайней мере универсальные накрывающие которых допускают транзитивную группу движений. Рассматриваются некоторые результаты, относящиеся к проблеме Гельмгольца—Ли.

Компактные G-пространства, допускающие транзитивную группу движений, оказываются топологическими многообразиями, а соответствующая группа — группой Ли. В. В. Рыжков

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

6669. Краевые условия для бесконечно малых изгибаний односвязной выпуклой поверхности. Р е м б с (Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung einfach zusammenhängender konvexer Flächen. R e m b s E d u a r d), Monatsh. Math., 1956, **60**, № 1, 57—65 (нем.)

Рассматривается бесконечно малое изгибание односвязного куска поверхности положительной кривизны; ставятся три краевые задачи: 1) задана вариация δk кривизны k граничной кривой; 2) задана вариация δa геодезического кручения; 3) задана вариация $\delta\varphi$ угла, который образует тангенциальная нормаль граничной кривой (т. е. нормаль, лежащая в касательной плоскости поверхности) с ее главной нормалью. Пусть $\mathbf{x}(u, v)$ — радиус-вектор текущей точки поверхности, $\mathbf{y}(u, v)$ — вектор вращения при данном бесконечно малом изгибании; тогда $\mathbf{y}_u=\alpha\mathbf{x}_u+\beta\mathbf{x}_v$, $\mathbf{y}_v=\gamma\mathbf{x}_u-\alpha\mathbf{x}_v$. Если координаты u, v изотермически сопряженные, то $\gamma=\beta$ и задача сводится к системе дифференциальных уравнений вида

$$\alpha_u+\beta_v=A\alpha+B\beta,\quad \alpha_v-\beta_u=C\alpha+D\beta. \tag{1}$$

В случае первой из трех указанных выше краевых задач, автор получает краевое условие для α и β в виде

$$\cos 2\vartheta\beta-\sin 2\vartheta\alpha=-\frac{\dot{s}\delta k}{\sqrt{(\mathbf{x}_u\mathbf{b})^2+(\mathbf{x}_v\mathbf{b})^2}} \tag{2}$$

где s — дуга края, $\mathbf{b}$ — единичный вектор бинормали, точка означает дифференцирование по дуге в параметрической плоскости u, v, угол ϑ определен соотношениями $\dot{u}=-\sin\vartheta$, $\dot{v}=\cos v$. Для третьей задачи краевое условие аналогично (2). Для второй задачи автор пишет краевое условие в виде

$$\sin 2\vartheta\,(E\beta)+\cos 2\vartheta\,(E\alpha)=-\dot{s}^2\delta a, \tag{3}$$

предполагая, что поверхность является куском сферы. Согласно (2) и (3), рассматриваемые краевые задачи имеют индекс $=+2$. Отсюда (ссылаясь на другие работы) автор заключает, что однородные задачи $\delta k=0$ или $\delta a=0$ имеют единственное решение $\alpha\equiv\beta\equiv 0$, что означает жесткость поверхности. Остальная часть статьи посвящена вопросу о разрешимости неоднородных задач (указаны необходимые интегральные условия на краю; более подробно рассмотрена задача для куска сферы).

Примечание референта. Краевые задачи для системы (1) подробно рассмотрены в работах И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, **31**, № 2, 217—314; перевод на немецкий язык: Vekua I. N., Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung auf die Theorie der Schalen. Berlin, Deutscher Verlag Wiss. 1956). Н. В. Ефимов

6670. Замечание к моей работе «Краевые условия для бесконечно малых изгибаний выпуклых поверхностей». Р е м б с (Bemerkung zu meiner Arbeit «Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen». R e m b s E d u a r d), Monatsh. Math., 1956, **60**, № 3, 212—213 (нем.)

В ранее опубликованной статье (реф. 6669) автор установил жесткость куска сферы при краевом условии $\delta a=0$ (вариация геодезического кручения края равна нулю). Здесь этот результат распространяется на случай односвязного куска любой поверхности положительной кривизны. Н. В. Ефимов

6671. Оценки деформаций регулярных выпуклых поверхностей в зависимости от изменения их внутренней метрики. Бакельман И. Я., Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 3, 358—361

Пусть регулярная выпуклая поверхность Φ ($r = r(u, v)$) с линейным элементом $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ малой деформацией переводится в некоторую поверхность Φ' ($r = r'(u, v)$) с линейным элементом $ds'^2 = E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2$. Автор оценивает отклонение формы Φ от Φ' в зависимости от величин, характеризующих внутренние метрики, поверхностей, т. е. в зависимости только от E, F, G, E', F', G' и их производных. Рассматриваются поверхности с краем и замкнутые поверхности. А. В. Погорелов

6672. О принадлежности поверхностей. Стрельцов В. В., Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1956, вып. 4, 128—140

Пусть G — область на плоскости. Строя ее выпуклую оболочку, мы заключаем G в выпуклую область с тем же диаметром d и длиной границы $l \leqslant \pi d$. Автор устанавливает аналогичный результат по внутренней геометрии (нерегулярных) поверхностей неположительной кривизны, используя понятия, методы и результаты предшествующих работ А. Д. Александрова и автора (РЖМат, 1954, 5778). Доказана теорема: Всякая гомеоморфная кругу поверхность P со всюду неположительной кривизной с данным диаметром d отрицательной частью кривизны ω^- и отрицательной частью поворота границы τ^- принадлежит такой поверхности P' со всюду неположительной кривизной, у которой тот же диаметр d, а ее граница имеет всюду неотрицательные повороты и ее длина при $\tau^- \geqslant -\pi$ не превосходит $(2\pi - \omega^-)\,d/2$, а при $\tau^- < -\pi$ не превосходит $(\pi - \omega^- - \tau^-)\,d/2$. Для доказательства поверхность P дополняется до бесконечной гомеоморфной плоскости поверхности неположительной кривизны P' и на P' берется выпуклая оболочка поверхности P (в случае $\tau^- < -\pi$ проводятся еще некоторые дальнейшие построения). Ю. А. Волков

6673. Разложение плоских областей в выпуклые ячейки возможно малого диаметра. Ленц (Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser. Lenz Hanfried), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1956, 58, № 3, 87—97 (нем.)

Рассматривается на плоскости выпуклая область $\mathfrak{B}$ диаметра 1. Пусть $e_m(\mathfrak{B})$ — наименьшее число такое, что $\mathfrak{B}$ может быть подразделена не более чем на m выпуклых областей диаметра $\leqslant e_m(\mathfrak{B})$. Пусть $|\mathfrak{B}|$ — площадь области $\mathfrak{B}$, F_h — наибольшая площадь h-угольника диаметра 1 и $\alpha = \max\left(F_6, \frac{F_5 + F_7}{2}\right)$.

Теорема 1.

$$\liminf_{m\to\infty} \sqrt{m}\, e_m(\mathfrak{B}) \geqslant \sqrt{\frac{|\mathfrak{B}|}{\alpha}} > 1,19\sqrt{|\mathfrak{B}|}.$$

Пусть $d_m(\mathfrak{B})$ — наименьшее число x такое, что $\mathfrak{B}$ можно было покрыть m множествами точек диаметром $\leqslant x$.

Теорема 2.

$$d_m(\mathfrak{B}) = e_m(\mathfrak{B}).$$

Доказательство теоремы 2 основано на лемме: Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две выпуклые плоские области диаметра $\leqslant d$, которые имеют общие внутренние точки, то или $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ имеет диаметр $\leqslant d$ или $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ может быть подразделена общей хордой $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в две подобласти диаметра $\leqslant d$.

Доказательство этой леммы не просто. Wu Guang-lei

6674. Замечания к работе Бибербаха о круговых треугольниках. Якобсталь (Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Bieberbach über Kreisbogendreiecke. Jacobsthal Ernst), Math. Ann. 1956, **132**, № 2, 145—147 (нем.)

В своей работе (РЖМат, 1957, 3411) Бибербах доказывает, в частности, монотонное убывание функции

$$F(x) = \frac{x\cos x(\sin x - x\cos x)}{(\sin x\cos x - x)^2}$$

внутри интервала $(0, \pi/2)$. В настоящей заметке отрицательность $F'(x)$ устанавливается другим методом. Задача сводится к доказательству неравенства

$$\frac{t}{\sin t} - 1 < 2\left(\frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t\right)^2,\ 0 < t < \pi.$$

А. Г. Школьник

6675. Замечание о сдвиге множества. Сойер (A remark on translated sets. Sawyer D. B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 157—159 (англ.)

Пусть Λ — целочисленная решетка в n-мерном евклидовом пространстве. Как известно, из теоремы Г. Минковского любая ограниченная замкнутая выпуклая область K, симметричная относительно начала координат O, с объемом 2^n, содержит точку из множества Λ, кроме O. Эта точка может находиться внутри или на границе K. Рассматривается подробно случай, когда точки Λ, отличные от O, находятся внутри K. В случае, когда точки Λ лежат только на границе K, область K обозначается через K^*.

Автор доказывает следующее предложение: Пусть S — замкнутое выпуклое ограниченное тело с объемом 1; тогда существует точка P такая, что каждая точка $\Lambda + P$ — внешняя для S, если S не равно и не гомотетично к $K^*/2$ для некоторого тела K^*.

И. Я. Бакельман

6676. О проблеме погружения Вейля. Уинтнер (On Weyl's imbedding problem. Wintner Aurel), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 3, 157—160 (англ.)

Референт доказал, что k раз дифференцируемая метрика ($k \geqslant 5$)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

(E, F, G имеют производные до k-го порядка) с положительной гауссовой кривизной допускает реализацию на $k-1$ раз дифференцируемой поверхности трехмерного евклидова пространства (Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1951). Ниренберг показал, что в этой теореме можно ограничиться четырехкратной дифференцируемостью и условием Гёльдера на четвертые производные. Автор показывает, что условие Гёльдера также может быть отброшено. А. В. Погорелов

6677. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей. Бакельман И. Я., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 67—124

Строится дифференциальная геометрия специального класса гладких поверхностей, обладающих ограниченной регулярностью в смысле двухкратной дифференцируемости. Именно, у вектор-функции $r(u, v)$, задающей поверхность, предполагается существование и непрерывность первых производных и обобщенных вторых производных, интегрируемых с квадратом. Такие поверхности автор называет поверхностями ограниченного искривления.

На поверхности ограниченного искривления переносятся многие результаты классической теории поверхностей, имеющие интегральный характер. Например, в работе показывается, что для поверхностей ограниченного искривления имеется теорема Гаусса о связи между внутренней и внешней кривизной поверхности.

Причем внутренняя кривизна поверхности определяется по А. Д. Александрову (поверхности ограниченного искривления являются многообразиями ограниченной кривизны), а внешняя кривизна с помощью интеграла

$$\iint \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\, d\sigma,$$

где L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, выражающиеся через первые и обобщенные вторые производные вектор-функции $r(u, v)$ по обычным формулам.

Основным средством исследования поверхностей ограниченного искривления является приближение их регулярными поверхностями $r_n(u, v)$, у которых интегралы от квадратов вторых производных функций $r_n(u, v)$ ограничены в совокупности. В работе доказывается возможность такого приближения.

А. В. Погорелов

6678. **Об одном обобщении выпуклых поверхностей. Решетняк Ю. Г.,** Матем. сб., 1956, 40, № 3, 381—398

Рассматривается специальный класс (O_δ) $(n-1)$-мерных многообразий в n-мерном евклидовом пространстве. В случае гладких многообразий он полностью характеризуется тем, что в каждой точке многообразия можно коснуться некоторым шаром радиуса δ, не содержащим внутри точек многообразия.

Основной результат: Кратчайшая на O_δ-поверхности имеет конечный поворот, или, что то же самое, единичный касательный вектор правой (левой) полукасательной есть вектор-функция ограниченной вариации. Доказательство обобщает известное доказательство И. М. Либермана для выпуклых поверхностей.

Доказывается также, что в окрестности каждой точки при подходящем выборе системы декартовых координат O_δ-поверхность задается уравнением $z = f(x_1, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n)$, где f и g — выпуклые функции.

А. В. Погорелов

См. также: 6442К, 6469

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

6679. **Численное решение линейных дифференциальных уравнений при помощи рядов Чебышева. Кленшоу** (The numerical solution of linear differential equations in Chebyshev series. Clenshaw C. W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 1, 134—149 (англ.)

Описывается метод вычисления коэффициентов разложения решения линейного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами в ряд по полиномам Чебышева. При этом для высшей производной, входящей в уравнение, принимается разложение по полиномам Чебышева. Коэффициенты определяются интегрированием этого ряда, подстановкой в первоначальное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых полиномах, причем принимаются во внимание заданные начальные или граничные условия. На конкретном примере показывается, что решение в виде ряда по полиномам Чебышева содержит более чем вполовину меньше членов, чем соответствующий ряд Фурье при одной и той же степени точности. Выигрыш во времени счета этим методом в сравнении с известными ранее остается под сомнением. Метод применялся к решению волнового уравнения для больших значений аргумента, причем счет коэффициентов производился вручную, а полиномы Чебышева по рекуррентным формулам считались на ACE в Теддингтоне. Дается несколько примеров, иллюстрирующих метод. Кратко обсуждается проблема нахождения решения вблизи особой точки, вопрос о накоплении ошибок и проблема нахождения собственных значений.

С. С. Токмалаева

6680. **Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Фокс, Робертсон** (The numerical solution of ordinary differential equations. Fox L., Robertson H. H.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 137—146. Discuss. 146—147 (англ.)

Краткий обзор численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (разложение в ряд Тейлора, методы Рунге—Кутта, Милна, Адамса, метод с использованием центральных разностей и метод решения граничных задач) с точки зрения реализации их на быстродействующих машинах. Обращается внимание на метод, разработанный Фоксом и Гудвином (Fox L., Goodwin E. T., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, 45, № 3, 373—388) применительно к нелинейным уравнениям вида $y'' + y'f(x) + g(x, y) = 0$ и состоящий в замене уравнения конечноразностным эквивалентом

$$y_{r+1}\left(1 + \frac{h}{2} f_r\right) = -y_{r-1}\left(1 - \frac{h}{2} f_r\right) + 2y_r - h^2 g_r - \Delta(y_r),$$

где $\Delta = \left(-\frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 - \ldots\right) + hf\left(-\frac{1}{6}\delta^3 + \frac{1}{30}\delta^5 - \ldots\right)$.

Пренебрегая в первом приближении Δ, по рекуррентной формуле на всем интервале интегрирования вычисляется последовательность y_r. Во втором приближении эти значения исправляются с учетом Δ. В применении к нелинейным дифференциальным уравнениям метод предполагает на каждом шагу решение алгебраического или трансцендентного уравнения.

Для решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с граничными условиями рекомендуется модификация метода конечных разностей с учетом во втором приближении членов высших порядков. В заключение краткое описание программ, реализующих перечисленные методы на ACE Национальной физической лаборатории в Теддингтоне. В приложении приводятся результаты дискуссии по поводу данной статьи.

С. С. Токмалаева

6681. **Точная граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина для линейного уравнения. Кащеев Н. А.,** Докл. АН СССР, 1956, 111, № 5, 937—940

Рассматривается вопрос о границе применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах для уравнения

$$L[y] \equiv y^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, y^{(n-k)} = f(x),$$

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Утверждается, что точная граница применимости x k-го порядка для этого уравнения совпадает с верхней гранью тех значений $X > x_0$, для которых k-я производная по x функции Коши $\varphi(x, \alpha)$ уравнения

$L[y]=0$ неотрицательна в треугольнике $x_0 \leqslant \alpha \leqslant x \leqslant X$ (Необходимые и достаточные условия неотрицательности функции Коши и ее производных рассмотрены в работах референтов. См., например, Тр. Ижевского механ. ин-та, 1957, № 2).

Приводится без доказательства теорема сравнения: Пусть x_k^{**} — граница применимости для уравнения

$$y^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} q_k(x)\, y^{(n-k)} = f(x),$$

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)},\ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $q_i = a_i$ при $i \leqslant n-k$ и $q_i \leqslant a_i$ при $i > n-k$.

Тогда $x_k^{**} \leqslant x_k^{*}$. (В тексте условия теоремы имеются опечатки).

Большое количество неточностей и опечаток затрудняет чтение статьи. Поэтому неясно, рассматриваются строгие или нестрогие неравенства между функцией сравнения и решением, а определение «абсолютного предела применимости» непонятно.

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

6682. Применение метода академика С. А. Чаплыгина к вычислению собственных значений одномерной краевой задачи Штурма—Лиувилля. Задирака (Застосування методу академіка С. О. Чаплигіна для обчислення власних значень одномірної крайової задачі Штурма-Ліувілля. Задирака К. В.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1954, **13**, № 8, 73—86 (укр.; рез. русск.)

Рассматривается задача о вычислении первого собственного значения краевой задачи

$$\frac{d}{dx}(ky') + (\lambda g - l)\, y = 0,\ \alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0,\ \beta' y(b) - \beta y'(b) = 0 \qquad (1)$$

при $l(x) \geqslant 0$ и обычных предположениях О $k(x)$ и $g(x)$. Задача (1) приводится к задаче

$$y'' + Q(x, \lambda)\, y = 0,\ y(a, \lambda) = \alpha,\ y'(a, \lambda) = \alpha',\ \beta' y(b) - \beta y'(b) = 0, \qquad (2)$$

где $Q(x, \lambda)$ — монотонно возрастающая функция параметра λ. Используя теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, автор строит сходящуюся последовательность поочередно верхних и нижних приближений к решению уравнения $y'' + Q(x, \lambda_0)\, y = 0$ при начальных условиях $y(a, \lambda_0) = \alpha,\ y'(a, \lambda_0) = \alpha'$, где λ_0 — пока неопределенное наименьшее собственное значение задачи (2). Подчиняя верхние и нижние приближения краевому условию $\beta' y(b) - \beta y'(b) = 0$, автор получает последовательность верхних и нижних приближений к первому собственному значению λ_0. Вычислительная схема иллюстрируется одним примером.

Б. Н. Бабкин

6683. Оценка множителя релаксации для малых шагов. Гарабедян (Estimation of the relaxation factor for small mesh size. Garabedian P. R.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, **10**, № 56, 183—185 (англ.)

В методе «последовательной сверхрелаксации» (РЖМат, 1955, 1953), применяемом для решения разностного уравнения, соответствующего уравнению Лапласа,

$$4\left(u_{i,j}^{(n+1)} - u_{i,j}^{(n)}\right) = r\left(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} - 4u_{i,j}^{(n)}\right)$$

(n — номер итерации), оценивается множитель релаксации r следующим образом:

$$r = \frac{2}{1 + 3{,}014h/\sqrt{A}}, \qquad (1)$$

где h — шаг, A — площадь данной области.

Аналогичная оценка приведена для девятиточечной аппроксимации. Как указывает автор, использование значения r, вычисленного по формуле (1), вместо точного значения требует дополнительно итераций для достижения той же точности не более 20% от числа итераций при оптимальном r. В. К. Саульев

6684. Численный метод нахождения гармонической функции с нелинейным условием на контуре. Лески (Calcolonumerico: Ricerca di una funzione armonica soggetta a condizioni al contorno non lineari. Lesky Peter.), Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1952 (1953), (4) **19**, 145—149 (итал.)

Численное применение (когда D — единичный круг и $m=2$) метода последовательных приближений Пиконе (Lesky, Menatsh. Math., 1950, 54, 241—254) для решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в } D;$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = a(Q, u)\, u + b(Q) \text{ на } FD,$$

где $a(Q, u) = \sum_{i=0}^{m} a_i(Q)\, u^i$;

Q — точка границы FD области D; a и b — данные функции. Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 290.

J. B. Diaz

6685. Метод решения краевых задач математической физики на машинах с перфокартами. Бергман (A method for solving boundary value problems of mathematical physics on punch card machines. Bergman Stefan), J. Assoc. Computing Mach., 1954, **1**, 101—104 (англ.)

Автор описывает метод численного решения краевой задачи для уравнения вида

$$u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — функции x и y. Решение $u(x, y)$ может быть сколь угодно точно аппроксимировано конечной линейной комбинацией частных решений $\varphi_m(x, y)$. Коэффициенты этой линейной комбинации определяются из условия минимизации в среднем граничных значений.

Используя свою теорию о структуре решения уравнения (1), автор описывает простые методы вычисления $\varphi_m(x, y)$ и вышеупомянутых коэффициентов. Автор указывает, «что подобный процесс может быть использован для определения собственных значений и собственных функций дифференциальных уравнений четвертого порядка, для систем дифференциальных уравнений, которые встречаются в теории упругости для некоторого класса дифференциальных уравнений с тремя переменными». E. Isaacson

Перевод из Math. Revs., 1955, **16**, № 3, 291.

6686. Оценка абсолютных величин частных производных гармонической функции в точках контура. Сутюшева Ш. Ш., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 79—91

Рассматривается гармоническая в ограниченной области D с границей γ функция $U(x, y)$, удовлетворяющая условию $U(x, y)|_\gamma = F(s)$, и соответствующая ей аналитическая функция $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$. При определенных требованиях гладкости на радиус

кривизны $\rho(s)$ границы γ и на функцию $F(s)$ доказывается существование вплоть до границы производных $f(z)$ и $f''(z)$ и даются оценки модулей этих производных через функции ρ и F и их производные по s до некоторого порядка. Указывается на возможность аналогично изучать старшие производные. Рассмотрения существенно опираются на свойства аналитических функций. В. С. Рябенький

6687. Об устойчивости решений некоторых разностных уравнений математической физики. Коваль (Про стійкість розв'язків деяких різницевих рівнянь математичної фізики. Коваль П. Й.) Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-ту, физ.-матем. сер., 1954, **16**, № 5, 3—11 (укр.)

Рассматривается вопрос об устойчивости решений разностных уравнений, представляющих аналоги уравнения теплопроводности и волнового уравнения (одномерный и многомерный случаи). Для разностных уравнений, соответствующих одномерному случаю уравнения теплопроводности, в качестве условия устойчивости получено неравенство $0 < l < h^2/2a^2$, где l — шаг по оси t, h — шаг по оси x, a^2 — постоянная уравнения теплопроводности. Этот результат известен (O'Brien, Hyman, Kaplan, J. Math. and Phys., 1951, 29, 4). Для многомерного случая получено соответствующее обобщение условия устойчивости $0 < l \leqslant 1/2a^2 \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s^2}$ (h_s — шаг по оси x_s; $s = 1, 2, \ldots, n$).

Аналогичные условия получены для волнового уравнения ($0 < l \leqslant h/a$ — в одномерном случае и $0 < l^2 \leqslant 1/a^2 \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s^2}$ — в многомерном случае).

Большое число небрежностей и опечаток, нечеткость формулировок и ошибочное высказывание на стр. 8, строка 9 снизу, о необходимости вышенаписанных условий для «асимтотической устойчивости» может привести читателя к неверному пониманию изложенных результатов. А. П. Шварцман

6688. О численном интегрировании уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ неявными методами. Дуглас (On the numerical integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ by implicit methods. Douglas Jim, Jr), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, **3**, № 1, 42—65 (англ.)

Рассматривается уравнение теплопроводности (1) в полубесконечном цилиндре $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $t > 0$ при начальном и граничном условиях (2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = F(x, y);\ u(0, y, t) = f_1, \ldots,$$
$$u(x, 1, t) = f_4. \tag{2}$$

Автор называет конечноразностный метод решения задачи (1)—(2) неявным, если решение конечноразностного аналога сходится к решению задачи (1)—(2) при любом конечном значении $\lambda^* = \Delta t/(\Delta x)^2 = \Delta t/(\Delta y)^2$, и явным, если сходимость имеет место лишь при достаточно малом λ^*.

Доказывается, что конечноразностные схемы (3) и (4), а также некоторые другие являются неявными;

$$\left.\begin{aligned} {}_x\Delta^2 w_{i,j,2n} + {}_y\Delta^2 w_{i,j,2n+1} &= (w_{i,j,2n+1} - w_{i,j,2n})/\Delta t \\ {}_x\Delta^2 w_{i,j,2n+2} + {}_y\Delta^2 w_{i,j,2n+1} &= (w_{i,j,2n+2} - w_{i,j,2n+1})/\Delta t \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$${}_x\Delta^2 w_{i,j,n+1} + {}_y\Delta^2 w_{i,j,n+1} = (w_{i,j,n+1} - w_{i,j,n})/\Delta t, \tag{4}$$

где $w_{i,j,n} = w(i/N, j/N, n\Delta t)$; $\Delta x = \Delta y = 1/N$,

$${}_x\Delta^2 w_{i,j,n} = (w_{i+1,j,n} - 2w_{i,j,n} + w_{i-1,j,n})/(\Delta x)^2,$$
$$i, j = 0, 1, \ldots, N;\ h \geqslant 0.$$

Отмечается, что конечноразностная схема (3 не имеет аналога в одномерном случае ($\partial^2 u/\partial x^2 = \partial u/\partial t$) Доказано, что погрешность решения по схеме (3 будет $O((\Delta t)) = O((\Delta x)^2)$. Оценки погрешности полу чены также для других неявных разностных схе (Аналогичные схемы для одномерного случая см J. Math. and Phys., 1951, 29, 223—251).

М. Г. Слободянски

6689. Численное решение параболических и эллиптических дифференциальных уравнений. Писмен Рачфорд (The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. Peaceman D. W., Rachford H. H., Jr), J. Soc Industr. and Appl. Math., 1955, **3**, № 1, 28—4 (англ.)

Методом конечных разностей рассматривается реше ние уравнения теплопроводности (1) в полубесконеч ном цилиндре $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $t > 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

при заданных начальных и граничных условиях.

Рассматриваются явные и неявные конечноразност ные схемы (реф. 6688). Например, разностная схема (2 неявная (сходимость имеет место при любом $\rho = (\Delta x)^2/\Delta t = (\Delta y)^2/\Delta t$)

$$T_{i-1,j,n+1} + T_{i+1,j,n+1} + T_{i,j-1,n+1} + T_{i,j+1,n+1} - (4+\rho) T_{i,j,n+1} = -\rho T_{i,j,n};\ 0 \leqslant n \leqslant N-1. \tag{2}$$

Для решения уравнения (2) применяется итеративны метод Либмана с множителем релаксации α для уско рения сходимости и выводится уравнение для опреде ления оптимального значения α (Frankel S. P., Matt Tables and Other Aids Comput., 1950, **4**, 65—75 Далее авторы предлагают «перемежающийся» метод состоящий в том, что конечноразностная схема реше ния уравнения (1) для первого интервала времен берется в виде (3), а для второго интервала вре мени — в виде (4)

$$T_{i-1,j,2n+1} - (2+\rho) T_{i,j,2n+1} + T_{i+1,j,2n+1} = -T_{i,j-1,2n} + (2-\rho) T_{i,j,2n} - T_{i,j+1,2n};$$

$$T_{i,j-1,2n+2} - (2+\rho) T_{i,j,2n+2} + T_{i,j+1,2n+2} = -T_{i-1,j,2n+1} + (2-\rho) T_{i,j,2n+1} - T_{i+1,j,2n+1}.$$

Показывается, что последняя разностная схема устой чивая для всех ρ и может быть применена такж к уравнению Лапласа. Рассмотрен ряд числовых пр меров и проведен подсчет числа операций.

М. Г. Слободянски

6690. Приближение и устойчивость решений гиперболических уравнений с данными на характеристиках. Кордуняну (Aproximarea şi stabilitatea soluţiilor ecuaţiilor hiperbolice cu date caracteristici. Corduneanu C.), Comun. Aca R. P. R., 1955, **5**, № 1, 21—26 (рум.; рез. русск франц.)

Устанавливается сходимость метода прямых, ан

логичного методу Роте (Rothe E., Math. Ann., 1929, **102**, 650), решения уравнения

$$Z_{xy} + AZ_x + BZ_y + CZ = D \qquad (1)$$

с условиями

$$Z(x, 0) = f(x),\ Z(0, y) = g(y),\ f(0) = g(0),$$

где A, A_x, B, B_y, C, D — непрерывные в прямоугольнике $R = [0 \leqslant x \leqslant \alpha;\ 0 \leqslant y \leqslant \beta]$ функции, а $f(x)$ и $g(y)$ имеют непрерывные производные первого порядка на $[0, \alpha]$ и $[0, \beta]$ соответственно.

Доказывается теорема об устойчивости решения уравнения типа (1). М. И. Нечепуренко

6691. Некоторые принципиальные замечания об устойчивости уравнений с частными разностями. Франкел (Some qualitative comments on stability considerations in partial difference equations. Frankel S. P.), Proc. Sympos. Appl. Math., **6**, New York—Toronto—London, 1956, 73—75 (англ.)

Отмечается, что неустойчивость разностного уравнения может указывать на «существенную» непригодность рассматриваемой вычислительной схемы. Смысл этого утверждения, которое точно не формулируется, разъясняется на нескольких примерах. В частности, отмечается, что неустойчивость разностного аналога задачи Коши для уравнения $du/dt = -\partial^2 u/\partial x^2$ связана с некорректностью постановки задачи Коши для этого уравнения. Неустойчивость при $\Delta t/\Delta x > 1$ обычного разностного аналога уравнения $\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2$ связана с тем, что информация о начальных условиях для дифференциального уравнения, доставляемая разностным уравнением в точку (t, x), не может быть достаточной, так как область зависимости значения решения разностного уравнения в точке (t, x) от начальных условий лежит строго внутри отрезка, высекаемого на оси $t = 0$ двумя характеристиками дифференциального уравнения, проходящими через эту точку.

Примечание референта. Соображения автора следуют из общих теорем о связи между свойствами дифференциального уравнения и аппроксимирующего его устойчивого разностного уравнения. См., например, В. С. Рябенький и А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956. В. С. Рябенький

6692. Численное решение параболических дифференциальных уравнений четвертого порядка. Крандалл (Numerical treatment of a fourth order parabolic partial differential equation. Crandall Stephen H.), J. Assoc. Comput. Mach., 1954, **1**, 111—118 (англ.)

Автор исследует численное решение уравнения колебания балки

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

$\partial^2\psi/\partial t^2$ заменяется обычным центральным разностным отношением второго порядка, содержащим $t - \Delta t$, t и $t + \Delta t$. $\partial^4\psi/\partial x^4$ можно заменить или центральным разностным отношением четвертого порядка в момент t («явное» разностное уравнение), или их среднеарифметическим в моменты $t - \Delta t$ и $t + \Delta t$ («неявное» разностное уравнение). Для простого случая автор сравнивает решение D уравнения (1) с «явным» E и «неявным» I разностными решениями. Неявная схема, которая лишь немного сложнее для этого случая, дала несколько лучшие результаты. Автор использует вектор-диаграмму для проверки действия на сходимость и устойчивость различных «собственных элементов», которые могут встретиться в D, E и I; он указывает, что изменением «временной шкалы» разностного уравнения можно получить лучшую сходимость.

M. A. Hyman

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 525.

6693. Приближенное решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Мусина С. С., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, **113**, № 10, 169—187

Рассматривается система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$y_i^{(n_i)} = f_i(s, Y) + \int_a^b K_i(s, t) F_i(t, Y)\, dt \ldots, \qquad (1)$$

где

$$f_i(s, Y) = f_i(s, y_1, \ldots, y_r, y_1', \ldots, y_r', \ldots$$
$$\ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_r^{(n_r-1)}),$$

$$F_i(s, Y) = F_i(s, y_1, \ldots, y_r, y_1', \ldots, y_r', \ldots, y_1^{(m)}, \ldots, y_r^{(m)}),$$

$m < n$, с начальными условиями $y_i^{(l)} = \alpha_{il}$ при $s = s_0$ $(i = 1, 2, \ldots, r,\ l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Предполагая, что ядра $K_i(s, t)$ регулярны, а функции $f_i(s, Y)$, $F_i(s, Y)$ непрерывны вместе с частными производными первого порядка по $y_k^{(l)}$, причем $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k^{(l)}} > 0$, $K_i(s, t) \dfrac{\partial F_i}{\partial y_k^{(l)}} \geqslant 0$, и система (1) имеет единственное n раз дифференцируемое решение, автор доказывает теорему, аналогичную теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах:

Если известны n раз непрерывно дифференцируемые функции z_i, удовлетворяющие начальным условиям и неравенствам

$$z_i^{(n_i)} > f_i(s, Z) + \int_a^b K_i(s, t) F_i(t, Z)\, dt, \ldots, \qquad (2)$$

то для всех $s > s_0$ $(a \leqslant s_0 < s \leqslant b)$ в области выполнения условий теоремы будут иметь место неравенства $z_i > y_i$. Опираясь на эту теорему, автор дает для случая $r = 1$ два метода построения верхних и нижних функций.

Первый из них — метод Ньютона, используемый в предположении, что выражение

$$Q = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y^{(k)}} \Delta y^{(k)} \right\}^2 f + \int_a^b K(s, t) \left\{ \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial}{\partial y^{(k)}} \Delta y^{(k)} \right\}^2 F dt,$$

где $\Delta y^{(k)} = y^{(k)} - u^{(k)}$ (или $z^{(k)} - y^{(k)}$), сохраняет знак в области, определенной начальными приближениями u_i и z_i — соответственно нижним и верхним. В этом случае можно построить или только верхние или только нижние приближения.

Второй метод — метод итераций. Он позволяет построить двухсторонние приближения, если известна начальная пара таких приближений. Автор иллюстрирует примером применение метода итераций. Затем дает доказательство сходимости приближений для систем интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, не отмечая, что для построения используется метод Ньютона.

Доказательство приводится к случаю одного дифференциального уравнения первого порядка, и делается ссылка на известное исследование Н. Н. Лузина (Тр. ЦАГИ, 1932. в. 141). Приводимое автором

доказательство нельзя считать правильным, так как не установлено, что рассматриваемые им приближения будут верхними или нижними.

В конце работы автор в правую часть системы (1) вводит множителем положительный параметр λ и доказывает сходимость метода итераций при достаточно малых λ.

Работа представляет обобщение аналогичных исследований С. А. Чаплыгина для некоторых классов дифференциальных и интегральных уравнений (Панов Д. Ю., Изв. АН СССР, 1934, № 6; Гельфанд А. В., Изв. АН СССР, 1938, № 5-6). Б. Н. Бабкин

6694. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. Соболев С. Л., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 4, 413—436

Автор ввел понятие «замыкания алгорифма»: если алгорифм решения приводит к дискретному процессу, зависящему от параметров h_i, то при стремлении h_i к 0 (или ∞) этот дискретный процесс может перейти в непрерывный, в некоторых случаях более обозримый, чем исходный дискретный процесс. Если предельный процесс нерегулярный, то это может указывать, например, на сильные потери значащих цифр в исходном процессе.

Приводятся некоторые общие понятия, введенные в связи с замыканием алгорифмов, в частности понятие о «равномерно вполне непрерывном множестве операторов» (т. е. о множестве операторов с компактной суммой множеств образов сферы); доказывается, что если A_n — равномерно вполне непрерывная система операторов, сильно сходящаяся к A, то из существования обратного оператора $(E-A)^{-1}$ следует существование сильно к ней сходящейся системы $(E-A_n)^{-1}$.

Общие идеи автора конкретизируются на примере решения интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x)=\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy+f(x).$$

Алгорифм решения заключается в обычной сеточной его аппроксимации (с шагом h) алгебраической системой

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{N} K_{ij}\varphi_j+f_i \quad (i=1,2,\ldots,N).$$

Этот алгорифм имеет замыкание, которое будет регулярным, если для всех уравнений

$$\varphi(x)=\int_0^z K(x,y)\varphi(y)\,dy+f(y),$$

где z пробегает отрезок $[0,1]$, не имеет места второй случай альтернативы Фредгольма. В этом случае указанный алгорифм приближенного решения при малом h проходит. В противном случае замыкание алгорифма приводит к процессу с особенностями и описанный естественный метод приближенного решения будет проходить плохо. Л. А. Люстерник

6695. Методы решения сингулярных интегральных уравнений. I. Берг (Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen. I. Berg Lothar), Math. Nachr., 1955 (1956), 14, № 4-6, 193—212 (нем.)

Разыскиваются способы приближенного решения сингулярных уравнений типа Коши в случае замкнутых контуров. Автор существенно опирается на теорию сингулярных уравнений Н. И. Мусхелишвили (Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946) и на одну теорему эквивалентности, впервые доказанную референтом (Сообщ. АН ГрузССР, 1941, 2, № 9).

Пусть

$$K\varphi=f \tag{1}$$

— заданное сингулярное уравнение. Строится оператор M^*, который регуляризирует уравнение (1), и притом таков, что уравнение

$$M^*\psi^*=0 \tag{2}$$

допускает ровно k' решений $\psi_1^*\ldots\psi_{k'}^*$, биортогональных к системе функций $\psi_1\ldots\psi_{k'}$, представляющих полную систему фундаментальных решений сопряженного с (1) однородного уравнения

$$K'\psi=0. \tag{3}$$

Имеем уравнение Фредгольма $M^*K\varphi=M^*f$ и его решение

$$\varphi=FM^*f+\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{4}$$

где F — разрешающий оператор Фредгольма, а x_i — полная система решений однородного уравнения $M^*Kx=0$, но, очевидно, $Kx_i=\sum_{j=1}^{k'} a_{ij}\psi_j^*$, откуда, умножив на некоторое решение ψ_l уравнения (3) и интегрируя, получим

$$(\psi_l, Kx_i)=(x_i, K\psi_l)=\sum_{j=1}^{k'} a_{ij}(\psi_j^*,\psi_l)=a_{il}=0.$$

Поэтому $Kx_i=0$ и общее решение (4) имеет вид

$$\varphi=FM^*f+\sum_1^k c_i\varphi_i=\Gamma f+\sum_1^k c_i\varphi_i,$$

где $\varphi_i\,(i=1,\ldots,k)$ — полная система фундаментальных решений однородного уравнения $K\varphi=0$.

Доказывается, что ядро разрешающего оператора $\Gamma\equiv FM^*$ удовлетворяет некоторой паре функциональных уравнений, представляющих аналогию известной пары функциональных уравнений для ядра разрешающего оператора в теории Фредгольма. Эти уравнения позволяют осуществить некоторый процесс интеграции для нахождения приближенного решения; процесс равномерно сходится, если уравнение (1) строго второго рода. Приводится также другой способ приближенного решения, основанный на рассмотрении вырожденных ядер. В. Д. Купрадзе

6696. Методы решения сингулярных интегральных уравнений. II. Берг (Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen. II. Berg Lothar), Wiss. Z. Univ. Rostock. Math.-naturwiss. Reihe, 1954—1955, 4, № 3, 381—391 (нем.)

Часть I см. реф. 6695

Предполагая представимость ядра и свободного члена рядами Лорана или Фурье, заданное сингулярное уравнение и полученное из него по способу Векуа эквивалентно-регулярное уравнение Фредгольма, автор сводит к бесконечным системам линейных уравнений. Исследование указанных линейных систем автор предполагает известным.

Рассмотрены также унитарные характеристические операторы, композиции которых приводят к новым, разрешимым в замкнутом виде, сингулярным уравнениям. В. Д. Купрадзе

6697. Об интерполяционных коэффициентах Лагранжа Моригути (Lagrange 補間係數について. 森口繁一), 科學, Кагаку, 1956, 26, № 12, 635—636 (японск.)

При использовании таблицы интерполяционных коэффициентов Лагранжа A_i обычно имеем $\sum A_i\neq 1$.

В формуле Гауса вперед

$$f(x) = f(x_0) + u\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{u(u-1)}{2}\{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})\} + \frac{u(u^2-1)}{6}\{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})\} + \frac{u(u^2-1)}{6}\{f(x_0) - 3f(x_1) + 3f(x_0) - f(x_{-1})\} + \frac{u(u^2-1)(u-2)}{24}\{f(x_2) - 4f(x_1) + 6f(x_0) - 4f(x_{-1}) + f(x_{-2})\},$$

где $u = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$, сначала округляем коэффициенты и потом суммируем в виде $\sum A_i f(x_i)$, тогда всегда получаем $\sum A_i = 1$. Это приводит к значительному повышению точности. Лим Рюн-чиль

6698. Формулы для обратной оскулаторной интерполяции. Солзер (Formulas for inverse osculatory interpolation. Salzer Herbert E.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1956, **56**, N 1, 51—54 (англ.)

В двух предыдущих работах (Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 513; J. Math. and Phys., 1945, **24**, 106) автор рассматривает обратную интерполяционную задачу, именно: найти x через $f_i = f(x_0 + ih)$ при помощи обращения интерполяционной формулы Лагранжа с равноотстоящими узлами $x_i = x_0 + ih$. В данной работе он рассматривает аналогичную задачу для оскулаторной интерполяционной формулы Эрмита, содержащей члены с первыми производными $f'(x_0 + ih) = f'_i$. Для $n = 2, 3, \ldots, 7$, где n — число узлов в прямой интерполяционной формуле Эрмита, автор предлагает обратные формулы, выражающие $(x - x_0)/h = p$ в виде ряда по степеням $r = (f(x_0) - f_0)/hf'_0$, коэффициенты которого зависят только от h, f_i, f'_i. Л. Чакалов

6699. Интегрирование уравнений пограничного слоя. Мексин (Integration of the boundary-layer equations. Meksyn D.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A237**, № 1211, 543—559 (англ.)

Метод интегрирования уравнений пограничного слоя, предложенный автором, состоит в нахождении некоторого асимптотического решения, содержащего неизвестный параметр. Для определения этого параметра приходится вычислять интегралы вида $\int_0^\infty e^{-F(\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma$, где $\varphi(\sigma)$ — медленно изменяющаяся функция, $F(\sigma)$ — положительная функция со стационарной точкой $\sigma = 0$. Вычисление этого интеграла проводится методом наискорейшего спуска. Получаемые при этом ряды могут быть расходящимися; суммирование их проводится с помощью преобразования Эйлера. Метод применялся к уравнению $f''' + ff'' = 0$ при граничных условиях, $f' = df/d\sigma = 0$ при $\sigma = 0$ и $df/d\sigma = 1$ при $\sigma = \infty$ и к уравнению $f''' + ff'' = \lambda(1 - f'^2)$ при тех же граничных условиях. В обоих случаях получаются быстро сходящиеся ряды и преобразование Эйлера применять не приходится. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными численным методом Хартреем. Кроме того, метод применялся к общему уравнению пограничного слоя (случай сжимаемой жидкости) около эллиптического цилиндра. При этом приходится пользоваться преобразованием Эйлера. Получаемые результаты хорошо согласуются с экспериментальными измерениями скорости. Л. М. Голубева

6700. Практические формулы для численного интегрирования. Кривошеин (Practical formulas for numerical integration. Krivoshein N.), Univ. Nac. Eva Peron. Publ. Fac. Ci. Fisicomat. № 206, Serie Tercera. Publ. Esp. 1953. **43**, 68—116 (исп.; рез. англ.)

Рассматривается приближенное вычисление интеграла $J = \int_0^{nh} f(x)\,dx$ посредством взвешенной суммы $J' = \sum_{i=0}^{n} p_i f(ih)$. Прежде всего автор дает обзор классических методов Эйлера—Маклорена, Ньютона—Котеса и особенно Симпсона. Затем он описывает новые методы для практического использования. Один из них называется нормализованным методом Эйлера и Маклорена и заключается в том, что производные функции $f(x)$ в точках $x = 0$ и $x = nh$ заменяются разностными отношениями (эта нормализация была известна ранее, например Лапласу; см. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, Springer, 1924, 243). Другие методы связаны со следующей фундаментальной идеей. Все линейные комбинации $(n+1)$ данных функций $y_0(x)$, $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ с $\det[y(ih)] \neq 0$ образуют формулу интегрирования $\int_0^{nh} y(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} p_i y(ih)$, где веса p_i зависят от данных функций y_k, но не зависят от коэффициентов комбинации $y = \sum C_k y_k$. При предположении, что $f(x)$ может быть аппроксимирована линейной комбинацией $y(x)$, применяется та же самая квадратурная формула к $f(x)$. Тогда имеется бесконечно много квадратурных формул; в практических формулах обычно имеется такая система $(n+1)$ функций y_k, которая хорошо аппроксимирует посредством линейной комбинации y_k данную функцию $f(x)$. Автор рассматривает две тригонометрические формулы, где функции y_k суть тригонометрические функции. Другая система функций y_k соответствует функции $\theta(x)$ одной переменной с $\theta(0) = 0$, $\theta(x) \neq 0$. В этом случае $y_k = \Pi_{i \neq k,\, i=0,\ldots,n}\,\theta(x - ih)$. Эти функции y_k представляют обобщение интерполяционных полиномов Лагранжа. Наконец, автор имеет дело с функциями кубических парабол. Рассматриваются некоторые линейные комбинации формулы Симпсона. Исследуется вопрос о погрешности.

H. Bückner

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 89.

6701. Замечание о численном интегрировании. Стейн (A note on numerical integration. Stein P.), Math. Gaz., 1956, **40**, № 334, 268—270 (англ.)

Из известной системы уравнений для определения узлов и коэффициентов квадратурной формулы в интервале (—1,1) выводятся формулы, большей частью известные. Отсутствуют оценки погрешности.

К. Е. Чернин

6702. Замечание о численном интегрировании некоторых вероятностных интегралов. Келсо (A note on the numerical evaluation of certain probability integrals. Kelso John M.), J. Operations Res. Soc. Amer., 1955, **3**, 343—344 (англ.).

6703. Пример численного интегрирования. Греппи (An example of numerical integration. Greppi H.), Math. Notae 1954, 14, 64—72 (исп.)

Точное значение интеграла

$$V = 4\int_0^b dy \int_0^a (r^2 - x^2 - y^2)^{1/2}\,dx,$$

где $a < r$, $b < r$, $a^2 + b^2 \leqslant r^2$

сравнивается с результатом численной квадратуры. Для определенных численных значений a, b и r основной прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ разбивается на 12 более мелких прямоугольников.

Интеграл по каждому такому прямоугольнику оценивается через объемы двух параллелепипедов, соответствующих максимальному и минимальному значениям интегрируемой функции.

H. Bückner

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 89.

6704. Остаточный член «предпочитаемой» квадратурной формулы Ньютона. Ионеску (Restul în formula de cuadratură «preferată» a lui Newton. Ionescu D. V.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, A7, № 7, 298—302 (рум.; рез. русск., франц.).

Рассматривается квадратурная формула Ньютона

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{8}\,[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)] + R,$$

где x_1 и x_2 — узлы квадратурной формулы, делящие отрезок $[a, b]$ на три равные части; R — остаточный член квадратурной формулы. Если $f^{IV}(x)$ непрерывна, то

$$R = -\frac{(b-a)^5}{6480}\,f^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in (a, b)$.

Для тех же функций $f(x)$ определяется выражение остаточного члена R_1 квадратурной формулы Симпсона

$$R_1 = -\frac{(b-a)^5}{2880}\,f^{IV}(\xi_1),$$

где $\xi_1 \in (a, b)$. Таким образом, квадратурная формула Ньютона дает более точный результат, чем квадратурная формула Симпсона.

В. М. Остиану

6705. «Метод Неймана» аппроксимации функции по ее значениям, полученным из наблюдений, и его связь с механическими квадратурами Гаусса-Якоби. Мауэрсбергер (Die «Neumannsche Methode» zur Approximation einer durch Beobachtungen gegebenen Funktion und ihr Zusammenhang mit der mechanischen Quadratur nach Gauß-Jacobi. Mauersberger Peter), Z. angew. Math. und Mech., 1956,36, № 9-10, 372—376 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается задача о среднеквадратической аппроксимации с весом $\rho(x)$ некоторой функции $f(x)$ на заданном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ линейными комбинациями ортогональных многочленов $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, по ее значениям $f(x)$, $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, в отдельных точках. Вводится вес $c_i\rho(x_i)$ на сетке x_i, $i = 1, \ldots, n$, причем постоянные c_i подбираются из условий

$$\sum_{j=1}^n c_i x_j^\nu \rho(x_j) = \int_a^b \xi^\nu \rho(\xi)\,d\xi, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \quad (1)$$

С таким весом несколько первых многочленов из последовательности $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ остаются ортогональными на сетке, и поэтому легко аппроксимировать функцию $f(x)$, рассматриваемую только на сетке, линейными комбинациями этих многочленов, наименее уклоняющимися от нее в среднем. Эти линейные комбинации можно использовать для аппроксимации функции $f(x)$ на всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, а не только на сетке. Задача о рациональном подборе точек сетки x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и об отыскании чисел c_i совпадает с задачей о механических квадратурах, и к ней применимы все результаты теории механических квадратур. Все результаты статьи переносятся на случай функции нескольких независимых переменных.

В. С. Рябенький

6706. Асимптотическая оценка погрешности в квадратурных формулах для функций с интегрируемой производной. Кардашевский К. М., Тр. Днепропетр. хим.-технол. ин-та, 1956, вып. 5, 245—248

Пусть $L(a, b, f)$ — результаты вычисления $\int_a^b f(x)\,dx$ по некоторой квадратурной формуле. Отрезок $[a, b]$ разбивается на n частей точками $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, и рассматривается квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{l=0}^n L(\xi_l, \xi_{l+1}, f). \quad (1)$$

Исследуется асимптотическая оценка формулы (1) при $n \to \infty$ для функции $f(x)$, имеющей интегрируемую производную порядка r $(r > 0)$. Доказывается при этом предположении, что при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) =$$

$$= \frac{(b-a)^r}{n^r}\left\{\lambda \int_a^b f^{(2)}(x)\,dx + o(1)\right\},$$

где $\lambda = \dfrac{1}{(r-1)!}\int_0^1 \left[\dfrac{(1-t)^r}{r} - L(0, 1; K_r(u-t))\right] dt,$

$$K_r(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ v^{r-1}, & v > 0. \end{cases}$$

Автор отмечает, что оценка не улучшается, если r-я производная $f(x)$ непрерывна.

А. Н. Иванова

6707. Абсциссы и веса для квадратурной формулы Гаусса высокого порядка. Дейвис, Рабинович (Abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order. Davis P., Rabinowitz P.), J. Res. Nar. Bur. Standards, 1956, 56, № 1, 35—37 (англ.)

Приводятся численные значения абсцисс x_{kn} и соответствующих им весов a_{kn} в квадратурной формуле Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n a_{kn} f(x_{kn})$$

для n=2; 4; 8; 16; 20; 24; 32; 40; 48. Вычисления производились на электронной вычислительной машине с точностью до 10^{-21} для абсцисс и 10^{-20} для весов. В § 2 дается объяснение метода вычислений.

Л. Чакалов

6708. Графическое вычисление интегралов, встречающихся в гармоническом анализе и в символическом исчислении. Лавиль (Résolution graphique d'intégrales utilisées en analyse harmonique et en calcul symbolique. Laville G., Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 1952 (1953), (4) 16, 153—168 (франц.)

Интеграл от $f(\theta)\,e^{i\theta}$ между произвольными пределами для случая, когда $f(\theta)$ есть полином, находится посредством построения полигона. Метод напоминает метод Лилля (Willers Fr. A., Practical analysis, New York, 1947, 79) для вычисления полиномов. Для общей функции $f(\theta)$ это построение применяется к полиномиальной аппроксимации функции $f(\theta)$ на подынтервалах, на которые разбивается основной интервал

интегрирования. Метод используется для вычисления комплексных коэффициентов Фурье и интегралов. Имеется подробный пример. P. W. Ketchum

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 404.

6709. Усиление оценки Островского для определителей. Моргенштерн (Eine Verschärfung der Ostrowski'schen Determinantenabschätzung. Morgenstern Dietrich), Math. Z., 1956, **66**, № 2, 143—146 (нем.)

Для определителя A вещественной матрицы $\|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, в предположении, что выполнены неравенства

$$s_\mu = |a_{\mu\mu}| - \sum_{\nu=1}^{n}{}' |a_{\mu\nu}| \geqslant 0 \left(\mu = 1, \ldots, n; \sum{}' = \sum_{\nu \neq \mu}\right),$$

доказана оценка

$$A \geqslant s_1 \ldots s_n + \sum{}'_\nu |a_{1\nu}| s_2 \ldots s_n + \ldots$$
$$\ldots + \sum{}'_\nu |a_{n\nu}| s_1 \ldots s_{n-1},$$

усиливающая в случае вещественных a_{ij} оценку Островского $A \geqslant s_1 \ldots s_n$ (Ostrowski A., Bull. sci. math. (2), 1937, **64**, 19—32), которая установлена без предположения вещественности a_{ij}. В. С. Рябенький

6710. Решение системы линейных уравнений методом итераций. Гест (The solution of linear simultaneous equations by matrix iteration. Guest J.), Austral. J. Phys., 1955, **8**, № 4, 425—439 (англ.)

Развивая идеи Штифеля, автор предлагает итерационный метод решения на быстродействующей электронной машине линейной системы алгебраических уравнений с несимметрической матрицей n-го порядка, причем итерационный процесс оканчивается на n-м шаге и дает точное решение системы, если ошибки округления не являются существенными. Идея метода состоит в том, что, наряду с исходной системой, автор рассматривает одновременно другую систему с транспонированной матрицей и в процессе решения использует соотношения ортогональности и сопряженности между определенными элементами этих систем, которые получаются на каждом шаге итерации.

Предлагаемый метод на примере сравнивается с методом Штифеля и показывается более быстрая сходимость.

Кроме того, в работе даются формулы для нахождения обратной матрицы и характеристического полинома, а также метод минимизации ошибок округления и контроля счета. Н. А. Гречина

6711. Об одном методе решения линейных алгебраических совместных уравнений. Лейдерман Ю. Ф., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, вып. 13, 153—158

6712. Методы продолжений для отсутствующего значения. Томпсон (Extensions to missing plot techniques. Thompson H. R.), Biometrics, 1956, **12**, № 3, 241—244 (англ.)

Для вычисления значений наблюдений, отсутствующих в опыте, используется метод наименьших квадратов. При этом матрица нормальной системы уравнений имеет специальный вид, который делает возможным нахождение обратной матрицы того же вида. Формулы для определения элементов обратной матрицы получены в простой форме. Приведен пример использования описанного метода. К. Е. Чернин

6713. Вычисление с краковянами. Торроха (Calculation with cracovians. Torroja J. M.), Univ. Madrid Fac. Ci. Sem. Astr. Geodes. Publ. 1953, № 21, 9 pp.

6714. Решение алгебраических уравнений на моделирующих устройствах. Кан (Solution of algebraic equations on an analog computer. Cahn C. R.), Rev. Scient. Instrum., 1956, **27**, № 10, 856—858 (англ.)

Разбирается применение моделирующих устройств, типа электронного дифференциального анализатора, для решения алгебраических уравнений, которое сводится к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Сдвиг корней алгебраического уравнения регулируется так, чтобы все они лежали в левой половине комплексной плоскости, а для переходных процессов достигалась бы граничная линия устойчивости. Сдвиг в этом случае будет действительной частью корня, а угловая частота соответствующего колебания — мнимой частью. Найденный один действительный корень или два комплексносопряженных корня отделяются от первоначального уравнения, и вновь полученное уравнение исследуется аналогично. Этот метод встречает значительные трудности в случае кратных корней. Рассматривается два варианта машинных связей и один из них рекомендуется для общих целей. Степень решаемого уравнения лимитируется количеством применяемых усилителей и набором потенциометров. Даются оценки погрешности для частных случаев. Погрешность, вызванная некорректным заданием коэффициентов, и погрешность из-за нелинейности потенциометров оказываются одного и того же порядка. В заключение рассматривается пример, хорошо иллюстрирующий некоторые особенности вычислительного процесса.

М. А. Алексидзе

6715. Более точное вычисление квадратных корней. Корхаммер (Genaue Errechnung von Quadratwurzeln. Korhammer August), Werkstatt und Betrieb, 1957, **90**, № 1, 49 (нем.)

Для нахождения более точного значения корня квадратного из данного числа n, чем найденное по таблице или при помощи логарифмической линейки, а также для проверки вычисления, выполненного по обычному правилу, предложена формула

$$\sqrt{n} = 0{,}5\left(a + \frac{n}{a}\right).$$

Здесь a есть приближенное значение корня, которое надо уточнить или проверить. Частное n/a должно быть найдено с числом знаков, соответствующим требуемой точности.

Приведены примеры, иллюстрирующие эффективность формулы, и сделано указание о способе применения ее при работе на вычислительных машинах.

А. Б. Штыкан

6716. Решение алгебраических уравнений; нахождение вещественных корней. Вычислитель (Solution of algebraic equations: real roots. Computer), Electronic and Radio Engr., 1957, **34**, № 2, 62—63 (англ.)

На конкретном примере пояснен основанный на идее Шин Нге Лина (Schin-Nge-Lin) способ приближенного вычисления вещественных корней уравнения степени n, число комплексных корней которого не превышает одной пары.

Сначала строится «грубый» график $f(x)$ и по нему определяется исходное (начальное), наименьшее по модулю, значение корня p_0, при котором $f(p_0) \approx 0$. Разделив $f(x)$ на $x(x - p_0)$ и получив остаток $b_1 x - c_1$, переписывают его в виде $b_1(x - c_1/b_1)$. $p_1 = c_1/b_1$ есть первое лучшее приближение корня. После этого вычисляется $f(x) : x(x - p_1)$. По остатку $b_2 x - c_2 = b_2(x - c_2/b_2)$ находится второе приближение $p_2 = c_2/b_2$.

Более точное значение корня можно найти по формуле

$$p=\frac{p_1^2-p_0p_2}{2p_1-p_0-p_2}=p_0+\frac{\delta_1^2}{2\delta_1+\delta_2},$$

где $\delta_1=p_1-p_0$, $\delta_2=p_2-p_0$, причем p_1 и p_2 должны быть вычислены с числом десятичных знаков, соответствующим требуемой точности. Найденное значение $x\cong p$, в случае необходимости, можно принять за исходное и снова повторить описанное вычисление.

Делением $f(x)$ на $(x-p)$ находят $f_1(x)$, степень которого $(n-1)$ и т. д.

Автор замечает, что в следующей публикации будет дан способ приближенного вычисления в тех случаях, когда число комплексных корней превышает два.

А. Б. Штыкан

6717. Обобщение метода Ньютона для решения нелинейных систем уравнений. Выханду Л., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, № 37, 114—117 (рез. эст.)

Рассматривается метод касательных гиперболоидов:

$$a_1^i(x_1^1-x_0^1)+\ \dots\ +a_n^i(x_1^n-x_0^n)+a_{n+1}^i=0,$$

$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

где

$$a_j^i=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\frac{f_i\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}}{2\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}}\right)_0\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

$$a_{n+1}^i=(f_i)_0,$$

для решения систем n алгебраических уравнений с n неизвестными

$$f_i(x^1,\ \dots,\ x^n)=0\ \ (i=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Дается вывод метода и указывается на его геометрический смысл. Предлагаемый метод сравнивается с методом Ньютона на примере решения конкретной системы уравнений ($n=2$). Условия сходимости метода не приводятся. Оценки отсутствуют.

М. И. Нечепуренко

6718. Графоаналитический способ решения некоторого типа нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Иванов В. В., Инженерный сб., 1956, 24, 183—189

Дан графоаналитический метод, основанный на идее Брауна (Braun E., Ingr-Arch., 1937, 8, 198—202), но реализуемый проще, если уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+Q(x)=0 \qquad (1)$$

Подстановкой

$$y=\dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}=y\frac{dy}{dx}$$

(1) приводится к виду

$$y\frac{dy}{dx}+Q(x)=0. \qquad (2)$$

На основании теоремы: «Длина поднормали в любой точке траектории на фазовой плоскости пропорциональна второй производной в положении, характеризуемом этой отображающей точкой» и (1), в фазовой плоскости $x0x$ может быть построена кривая $l_2(x)$, ординаты которой пропорциональны поднормалям в точках интегральной кривой $\dot{x}=\dot{x}(x, C_1)$ уравнения (2). Если дана начальная точка $M_0(\dot{x}_0, x_0, C_1)$, то от проекции ее E_0 на оси абсцисс откладывается $E_0B_0=l_2(x_0)$ и может быть проведена нормаль B_0M_0 в точке M_0.

На основании второй теоремы: «Элементарный угол $d\psi$ в радианах, вершина которого находится в точке B пересечения нормали к фазовой траектории и оси абсцисс и одна из сторон которого совпадает с этой нормалью, пропорционален элементарному отрезку времени dt»— откладывается угол $M_0B_0M_1=d\psi$ с вершиной в точке B_0. Найденная точка M_1 на кривой $\dot{x}=\dot{x}(x, C_1)$ характеризует состояние системы, описываемой уравнением (1), через промежуток времени dt, пропорциональный углу $d\psi$. Аналогично можно найти точку M_2 и последующие.

После этого легко построить график $x=x(t, C_1, C_2)$ решения уравнения (1), а также графики $\dot{x}=\dot{x}(t, C_1, C_2)$ и $\ddot{x}=\ddot{x}(t, C_1, C_2)$.

Рассмотрен конкретный пример. А. Б. Штыкан

6719. Одна интересная связь между номограммой с параллельными шкалами и N-номограммой. Мейер-цур-Капеллен (Eine interessante Kopplung zwischen Parallel-Fluchtentafel und N-Fluchtentafel. Meyer zur Capellen W.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 12, 473—474 (нем.)

Предлагается искусственный прием номографирования функций вида $w=f_1(x, y)u+f_2(x, y)v$, где $f_1(x, y)+f_2(x, y)=\text{const}=1$.

Рассмотрен пример составной номограммы с пятью прямолинейными равномерными шкалами для функций

$$w=\frac{x-y}{x+y}u+\frac{2y}{x+y}v. \qquad (1)$$

В основе составной номограммы лежат номограмма с тремя параллельными шкалами и N-номограмма.

М. И. Нечепуренко

6720. Несколько слов о номографии. Мейкснер (Kilka słów o nomografii. Meixner Jan), Sylwan, 1954, 98, № 6, 502—508 (польск.)

6721. Стереоскопическая номография и решение проблемы общей анаморфозы в N-мерном пространстве. Вильнер И. А., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 123—130

Рассматривается использование пространственных номограмм уравнений $f(x, y, z)=0$ с помощью построения их стереоскопических проекций. В начале кратко излагается предлагаемый автором метод тернарных полей для получения пространственной номограммы, определяющей выравниванием по плоскости значения переменных x, y, z из некоторой системы уравнений

$$f_i(x, y, z, z_i)=0\ \ (i=1,\ 2,\ 3)$$

по заданным в трех тернарных полях (z_1, z_2, z_3) этой номограммы значениям переменных z_i. Указывается способ получения из этой номограммы сначала пространственной номограммы уравнения $f(x, y, z)=0$ и затем стереоскопических ее проекций на плоскость.

П. В. Николаев

6722. О номографировании функций, заданных на сетке. Крейнес М. А., Вайнштейн И. А., Айзенштат Н. Д., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 5, 941—944

Рассматривается функция $z=f(x, y)$ целочисленных аргументов, определенная с помощью некоторой прямолинейной сетки на плоскости xy линиями уровня. Эта функция называется номографируемой, если для

нее существует сетка с некоторой системой прямолинейных линий уровня. Строится пример неномографируемой функции, монотонной по каждой из переменных (при постоянной другой) и являющейся пределом последовательности номографируемых функций.

Рассматривается номографирование функций $z = f(x, y)$ с помощью непрерывных функций; приводится пример непрерывной функции, монотонно возрастающей по каждой из переменных и не номографируемой с помощью непрерывных функций.

П. В. Николаев

6723. Номограмма, связывающая параметры нормального распределения с вероятностями при классификации по трем группам. Большев Л. Н., Инженерный сб., 1955, 21, 212—214

Построена створная номограмма для системы уравнений

$$q_1 = \Phi\left(-\frac{1+\alpha'}{\sigma'}\right);\quad q_2 = 100 - \Phi\left(\frac{1-\alpha'}{\sigma'}\right)$$

с четырьмя неизвестными, где

$$\Phi(x) = \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

а q_1 и q_2 — вероятности неравенств $\xi < c_1$; $c_2 < \xi$ для случайной величины ξ.

П. В. Николаев

6724. Представление уравнений с четырьмя переменными при помощи ромбоидальных номограмм. Радо, Бал, Гергей, Ионеску (Reprezentarea ecuaţiilor cu patru variabile cu ajitorul nomogramei romboidale. Rado Fr., Bal L., Gergely E., Ionescu Gh.), Lucrările consfăt. geom. diferent. 1955. Timişoara Acad. RPR., 1956, 361—368 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются условия представимости уравнения

$$z_4 = f(z_1, z_2, z_3) \qquad (1)$$

в форме

$$z_4 = F[\varphi(z_1, z_2) + h(z_3),\ \psi(z_1 z_2,)].$$

Эти условия необходимы и достаточны для возможности построения ромбоидальной номограммы уравнения (1). Они имеют вид системы дифференциальных уравнений в частных производных, которым должна удовлетворять функция f.

Г. Е. Джемс-Леви

6725 К. Кубическое уравнение с тремя вещественными корнями; его геометрическая диаграмма и машина, которая решает его. Содди (The cubic equation with three real roots; its geometrical diagram and a machine that solves it. Soddy Frederick. London, New World Publs, 1956, 21 pp., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 329, 13 (англ.)

См. также: 6278, 6391, 6398, 6456, 6495

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

6726. Цифровой десятичный дифференциальный анализатор. Новое вычислительное средство для инженеров и научных работников. Мендельсон (The decimal digital differential analyzer. A new tool for engineering and science. Mendelson Myron J.), Aeronaut. Engng Rev., 1954, 13, № 2, 42—54 (англ.)

Излагаются принципы построения цифрового дифференциального анализатора КРК-105 (CRC 105) (РЖМат, 1954, 3484). Половина статьи посвящена изложению принципов работы цифрового интегратора, описанного в статьях Sprague R. E., MTAC, 1952, 6, № 37, 41—49; Donan J. F., MTAC, 1952, 6, № 38, 102—112:

В КРК-105 числа задаются при помощи двоично-десятичного кода, состоящего из N десятичных разрядов для цифровой части и одного $N+1$-го двоичного разряда для знака числа. Разряд знака располагается перед старшим разрядом цифровой части. Из старшего разряда цифровой части в разряд знака при сложении чисел предусмотрена цепь переноса. Положительные числа задаются прямым кодом для цифровой части и кодом «1» для знака числа. Отрицательные числа задаются дополнительным кодом для цифровой части и кодом «0» для знака числа. Например, число нуль представляется кодом

$$1.00\ldots0, \qquad (1)$$

максимальное положительное число $10^N - 1$ представляется кодом

$$1.99\ldots9, \qquad (2)$$

а максимальное по модулю отрицательное число 10^N представляется кодом

$$0.00\ldots0. \qquad (3)$$

Выводятся соотношения для подбора масштабов переменных величин при решении задач на вычислительной машине КРК-105. Количество разрядов N в кодах чисел задается либо из расчета получения бо́льшей точности решения за счет увеличения времени решения, либо исходя из заданного небольшого времени решения с ущербом для точности решения.

Код чисел в КРК-105 обладает следующим свойством цикличности. Если к коду максимального положительного числа (2) прибавить единицу, то получится код максимального по модулю отрицательного числа (3), и, наоборот, если от кода максимального по модулю отрицательного числа (3) отнять единицу, то получится код максимального положительного числа (2). Поэтому, если в начальный момент в интеграторе установить значение подынтегральной функции Y, равное (2) и (3), в качестве приращения подынтегральной функции взять величину $-du - dv - dw - \ldots$ и, кроме того, замкнуть выход этого интегратора dz на подынтегральную функцию, а на вход независимого аргумента интегратора подключить независимое переменное x, то при условии

$$\left|(u + v + w + \ldots)'_x\right| < 1 \qquad (4)$$

интегратор будет выдавать с некоторой погрешностью приращение $dz = d(u + v + w + \ldots)$. Интегратор, работающий указанным способом, называется операционным интегратором.

Если в рассмотренном случае $du = df(x)$, $dv + dw + \ldots \equiv 0$, а выход интегратора dz замкнут на вход подынтегральной функции через систему двух дополнительных интеграторов, образующих $\sin z$, т. е. на вход подынтегральной функции подается $d\sin z$, то при условии

$$\left|(\sin z)'_z\right| > \left|f'_x(x)\right| \qquad (5)$$

получается функция $z = \arcsin f(x)$. В этом случае интегратор называется разрешающим. Разрешающие интеграторы позволяют вычислять обратные функции.

Далее приводятся 2 примера с исполнением интеграторами функции перемены знака. Указывается, что в КРК-105 имеются так называемые интеграторы-ограничители, которые ограничивают изменение переменной в заданных, не обязательно симметричных относительно нуля, пределах, отрезая выходящие за эти пределы участки кривой. Умножение переменных величин в КРК-105 основано на интегрировании дифференциальной связи $d(uv) = udv + vdu$, а деление переменных величин осуществляется путем образования обратной величины для знаменателя при помощи некоторой замкнутой цепи и умножения ее на числитель.

Примечание референта. Неравенства (4) и (5) даны нами; в реферируемой работе вместо (5) дается указание на то, что $|f(x)| < 1$.

Деление переменных величин $u = 10^N w/v$ можно осуществить при помощи трех интеграторов (один интегратор разрешающий) путем образования функции $\bar{u} = cu\,(0 < c \leqslant 1)$ из дифференциального соотношения $1/10^N v d\bar{u} - d(cw) - (-1/10^N \bar{u} dv) \equiv 0$ при условии

$$\left|\frac{v}{10^N}\right| > c\left|w'_x - \frac{u}{10^N}v'_x\right|.$$

Е. А. Волков

6727. Магнитная вычислительная машина УНИВАК. Часть I. Логическая схема и описание конструкции. Геринг, Стоу, Вильсон (The UNIVAC magnetic computer. Part I. Logical design and specifications. Gehring A. J., Stowe L. W., Wilson L. D.), IRE Convent. Rec., 1956, 4, № 4, 109 (англ.)

Тезисы доклада о цифровой вычислительной машине на магнитных элементах, разработанной фирмой «Ремингтон Рэнд». Машина двухадресная, двоично-десятичная, последовательно параллельная. В арифметических и управляющих схемах использовано около 1500 элементов, состоящих из магнитных сердечников и германиевых диодов. Арифметическое устройство обладает четырьмя регистрами рециркуляционного типа, каждый длиной в один машинный код. Управление осуществляется с помощью переключающей матрицы, дешифрующей состояние 6-разрядного статического регистра, который запоминает цифры инструкции. Два стандартных типа последовательных магнитных усилителей приводятся в действие двухфазными прямоугольными тактовыми импульсами с частотой 660 *кгц*.

Эти усилители, как и другие схемы, смонтированы на блочных панелях 17 типов с печатным мотажом. Запоминающим устройством служит барабан емкостью 200 ячеек, вращающийся со скоростью 16 500 об/мин.

Н. П. Брусенцов

6728. Магнитная вычислительная машина УНИВАК. Часть II. Мегагерцные магнитные элементы. Смит (The UNIVAC magnetic computer. Part 2. Megacycle magnetic modules. Smith B. K.), IRE Convent. Rec. 1956, 4, № 4, 110 (англ.)

Часть I см. реф. 6727. Тезисы доклада о магнитных усилителях для вычислительных машин, разработанных фирмой «Рэмингтон Рэнд».

Эти усилители приспособлены для выполнения всех обычных функций в электроннолламповых машинах и работают на частоте, превышающей 2 *мггц*.

Н. П. Брусенцов

6729. Магнитная вычислительная машина УНИВАК. Часть III. Запоминающее устройство на барабане. Портер, Смит, Нейман (The UNIVAC magnetic computer. Part 3. Drum memory. Porter V. J., Smith S. E., Naiman M.), IRE Convent. Rec., 1956, 4, № 4, 111 (англ.)

Части I, II см. реф. 6727, 6728. Тезисы доклада, в котором описано запоминающее устройство на магнитном барабане с рабочей частотой 658 *кгц* и емкостью 110 тыс. двоичных цифр, из которых для 24 тыс. максимальное время обращения составляет 0,9 *мсек*, для 72 тыс. — 3,6 *мсек*. В целях предотвращения коррозии, снижения потребляемой мощности и улучшения теплоотвода барабан помещен в гелий.

Большое число оборотов (1600 об/мин) и высокая плотность записи обеспечивают малое время обращения и высокую рабочую частоту. Конструкция головок отличается компактностью и легкостью прецизионной установки их по отношению к барабану.

Н. П. Брусенцов

6730. Электронная математическая машина IRSIA-FNRS. Буланже (La machine mathématique électronique IRSIA-FNRS. Boulanger Georges R.), Organis. scient., 1956, **30**, № 8—9, 181—185 (франц.)

Краткое описание первой бельгийской быстродействующей цифровой вычислительной машины, построенной по заданию Института поощрения научных изысканий в области промышленности и сельского хозяйства (IRSIA) и Национального фонда научных исследований (FNRS), вступившей в эксплуатацию в ноябре 1955 г. в Антверпене (см. также РЖМат, 1957, 2736).

Машина собрана на одной основной стойке, длиной 7,50 *м* и высотой 2,50 *м*, и двух вспомогательных, длиной каждая по 2,50 *м* и той же высоты. Машина сконструирована на базе взаимозаменяемых стандартных блоков и содержит 3000 электронных ламп, 1000 газонаполненных ламп с холодным катодом, 400 реле, 1500 селеновых и 5000 германиевых диодов. Общая мощность, потребляемая машиной, составляет 15 *квт*. Машина оперирует с 17-значными числами в двоично-десятичном коде, при следующей форме декадного кодирования:

0 0000	5 1000
1 0001	6 1001
2 0010	7 1010
3 0101	8 1101
4 0100	9 1100

Сложение двух чисел занимает 3 *мсек*, умножение 15 *мсек*.

Основными запоминающими устройствами машины являются магнитная лента и магнитный барабан. Диаметр магнитного барабана 300 *мм*, скорость вращения 4,150 об/мин, т. е. среднее время выборки составляет 7 *мсек*. Число дорожек (не считая запасных) 216, емкость каждой 1440 двоичных знаков. Кроме того, в машине имеются промежуточные запоминающие устройства малой емкости на триггерах и газоразрядных лампах с холодным катодом. За время эксплуатации с помощью машины IRSIA-FNRS были составлены подробные таблицы функций Бесселя, решен ряд сложных задач аэродинамики, баллистики и т. д.

Кратко описываются принципы действия цифровых вычислительных машин и их основные части и блоки.

А. А. Крупский

6731. Асинхронные двоичные счетчики по нечетному модулю. Робертсон (Odd binary asynchronous counters. Robertson J. E.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 1, 12—15, 35 (англ.)

Описывается общий метод построения так называемых асинхронных двоичных счетчиков, считающих по любому целому нечетному модулю на основе асинхронных двоичных счетчиков по модулю 2.

Асинхронный двоичный счетчик по модулю 2 представляет собой две одинаковые параллельные цепи из триггеров, связанных между собой системой вентилей таким образом, что счет в обеих цепях возможен только при попеременной подаче импульсов на эти две параллельные цепи, каждая из которых работает как обычный двоичный счетчик по модулю 2, причем счет в одной из них опережает другую на 1, чем и объясняется название «асинхронный». Первая из этих цепей (опережающая) называется «истинной», а вторая — «ложной». Взаимосвязь между триггерами этих цепей такова, что каждая пара соответствующих «ложных» и «истинных» триггеров при попеременном поступлении импульсов на входы цепей принимает состояния, изображающие числа от 0 до 3 в двухразрядном циклическом коде (коде Грея).

Каждый каскад асинхронного двоичного счетчика по модулю 2 состоит из двух триггеров («истинного» и «ложного») и шести вентилей связи. Для образования вычитающего асинхронного двоичного счетчика из суммирующего достаточно выходы «истинных» триггеров предыдущих каскадов подать на входы «ложных» триггеров последующих каскадов, а выходы «ложных»— на входы «истинных». Тогда состояния «истинных» триггеров будут изображать остаток от вычитания поступивших импульсов. Приводятся логические схемы суммирующего и вычитающего асинхронных счетчиков по модулю 2 и таблицы, поясняющие их работу. Указывается, что в некоторых приложениях вычислительной техники требуется, чтобы каждое последующее состояние n-каскадного счетчика отличалось от предыдущего на нечетное целое число q при поступлении на его вход одного импульса.

Показывается, как описанный выше асинхронный счетчик по модулю 2 может быть использован для такой цели. Метод заключается в разбиении n-каскадного счетчика (с номерами каскадов $0,1, \ldots, n-1$) на ряд отдельных чередующихся суммирующих и вычитающих асинхронных субсчетчиков по модулю 2. Количество k таких субсчетчиков и количество каскадов в каждом из них определяется выражением

$$q = \pm 2^{p_k - 1} \ldots \mp 2^{p_3} \pm 2^{p_2} \mp 2^{p_1} \pm 2^{p_0},$$

где $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{k-1} < p_k = n$.

Количество разрядов в i-м счетчике определятся как разность $p_{i+1} - p_i$. Знак перед членами равенства определяет, каким должен быть данный субсчетчик i (где $i = 0,1, \ldots, k-1$) — суммирующим или вычитающим.

Приводится пример проектирования асинхронного двоичного счетчика по модулю $q = 13$ при $n = 5$. В этом случае $q = +2^4 - 2^2 + 2^0 = 16 - 4 + 1 = 13$, откуда $k = 3$, $p_0 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 = 4$ и требуется три субсчетчика: суммирующий субсчетчик на первых двух каскадах 0 и 1, вычитающий субсчетчик на каскадах 2 и 3 и суммирующий субсчетчик на последнем каскаде 4.

Приводится блок-схема асинхронного двоичного счетчика по любому нечетному модулю и конкретная логическая схема такого счетчика по модулю 13.

Преимуществом такого метода построения счетчика по нечетному модулю перед обычным методом, использующим только суммирующие субсчетчики, является упрощение конструкции счетчика в части осуществления переноса (суммирующего или вычитающего) из одного субсчетчика в другой благодаря тому, что эта операция сводится к запрещению посылки импульса по «ложному» входу того субсчетчика, в который должен быть осуществлен перенос (суммирующий или вычитающий).

В результате получается экономия как во времени работы счетчика, так и в количестве логических элементов, необходимых для его работы.

Указывается, что описанный общий метод построения асинхронных двоичных счетчиков по нечетному модулю может быть распространен и на случай четных модулей.

Если n-разрядный асинхронный двоичный счетчик должен считать по четному модулю 2^p, то $n-p$ его старших разрядов должны считать по модулю q (нечетному), причем в каскаде p должен быть всегда нуль. Такой счетчик, очевидно, может работать по любому целому модулю, как четному, так и нечетному.

Б. И. Стрелков

6732. Запоминающие устройства вычислительных машин. Миллер (Control handbook. Section 9. Storage gevices continued. Miller J. T.), Instrum. Practice, 1955, **9**, № 11, 1057—1060 (англ.)

Приводится сводная таблица основных параметров запоминающих устройств шести коммерческих машин-ГЕК (HEC), ИБМ-650, ПКК (PCC), Нэшнел (National), ЭЛЛИОТТ-402, Пегас. Отмечается, что во всех этих машинах в качестве главного запоминающего устройства применяется магнитный барабан. В других моделях цифровых вычислительных машин, разработанных университетами и исследовательскими центрами, применяются другие типы запоминающих устройств. Запоминающие устройства могут оцениваться тремя факторами: стоимостью, надежностью и скоростью. В частности, в машине АКЕ (ACE) стоимость одного двоичного разряда для ртутной линии составляет 7 шиллингов, причем две трети этой стоимости расходуется на вспомогательное оборудование. Стоимость одного двоичного разряда для машины ЛЕО (LEO) составляет 2 шиллинга. Дается сравнение ртутных и магнитострикционных линий задержки. Скорость распространения колебаний в ртутной линии относительно низка и равна 1,5 *м* в 1 *мсек*, в магнитострикционной — 5 *м*. Некоторые преимущества ртутной линии по сравнению с магнитострикционной возмещаются малым объемом, занимаемым магнитострикционной линией. Так, в машине «ЭЛЛИОТТ-402» в качестве короткой линии применяется никелевая трубка с внешним диаметром 0,9 *мм* и внутренним 0,8 *мм*. Для длинной линии используется никелевая проволока, которая может быть свернута в плоскую спираль. Максимальная частота для ртутной линии приблизительно равна 5 *мгц* с несущей 15 *мгц*, для никелевой линии 1 *мгц*. Число знаков на метр для ртутной линии равно 3300, для никелевой 200. Рассматриваются также другие типы запоминающих устройств: магнитный барабан, катодолучевая трубка и запоминающее устройство на ферритах. Приведена таблица параметров магнитных барабанов фирмы «Ферранти». Отмечается, что имеется мало данных по применению, надежности и стоимости запоминающих устройств на ферритах.

В. М. Тарасевич

6733. Компаундная модуляция улучшает запоминание данных. Бентли (Compound modulation improves data storage. Bentley Ronald L.), Control Engng, 1956, **3**, № 3, 104—105 (англ.)

При записи данных на магнитную ленту применение амплитудной или частотной модуляции дает значительные погрешности, обусловливаемые как характеристиками ленты, так и несовершенством электронного оборудования. Предлагается модуляция, являющаяся комбинацией амплитудной модуляции с подавлением несущей и частотной модуляции. Предлагаемая модуляция свободна от недостатков, присущих каждому виду модуляции в отдельности, и дает более высокие точности. Кратко, на примере, изложены принципы компаундной модуляции.

А. И. Щуров

6734. Система составления программы вычислений для машины ИРА-1103. Бауэр (An integrated computation system for the ERA-1103. Bauer Walter F.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 3, 181—185 (англ.)

Описывается система для автоматического составления программы вычислений на основе имеющейся библиотеки подпрограмм, разработанная для машины ИРА-1103.

Приводится краткая характеристика машины: система команд двухадресная, внутреннее электростатическое запоминающее устройство рассчитано на 1024 числа, ввод и вывод данных производится с помощью перфокарт и перфоленты. В качестве внешнего запоминающего устройства используется магнитный барабан, рассчитанный на запись 16 384 36-разрядных двоичных чисел. В режиме комплектования программы 1024 ячейки барабана отводятся для временного хранения данных внутреннего запоминающего устройства, 3072 ячейки используются для записи обслуживающей программы, 12 248 ячеек предназначены для записи составляемой программы и 40 ячеек отведены для управления внешними устройствами. Программа комплектуется путем использования библиотеки подпрограмм, записанных на магнитной ленте. Приводятся краткие пояснения работы машины при выполнении команд обслуживающей программы и программы управления внешними устройствами.

Б. Н. Малиновский

6735. Контрольные коды для цифровых вычислительных машин. Даймонд (Checking codes for digital computers. Diamond Joseph M.), Proc. I. R. E., 1955, 43, № 4, 487—488 (англ.)

Сообщается о результатах работы по отысканию новых кодов для цифровых машин. Из используемых кодов самым удобным признан $n+3$, который позволяет получить дополнения отрицательных чисел заменой 0 на 1 и наоборот. Кроме того, для представления одного десятичного числа код использует 4 двоичные цифры и имеет простое правило сложения. Были рассмотрены коды с различным «расстоянием». Под «расстоянием» понимается число, соответствующее количеству двоичных цифр, в которых закодированные числа отличаются друг от друга. Если все десять комбинаций какого-либо кода имеют расстояния не менее d, то говорят, что код имеет расстояние d. Код «расстояния» d позволяет найти $d-1$ ошибку. Следовательно, контрольный код имеет расстояние не меньше 2. Чтобы сложение было двоичным, код должен иметь вид $an+b$.

Лучший код с расстоянием 2 есть код $3n+2$, с расстоянием 3 — дко $27n+6$. Для кода расстояния 2 нужно 5 двоичных знаков, для кода расстояния 3 нужно 11 двоичных знаков.

Н. Н. Рикко

6736. Новые кодирующие устройства расширяют возможности систем для обработки данных. Гаррот (New coding systems broaden data processing. Garrott P. B.), Automation, 1956, 3, № 1, 70—76 (англ.)

Приведено краткое описание и фотографии двух устройств, автоматически считывающих данные с различных документов и пробивающих их на перфокартах: устройство «Скандекс» (Scandex) фирмы «Farrington Manufacturing Co.» и устройства «Станоматик» (Stanomatic) фирмы «Standard Register Co.».

Для перфорирования данных с помощью этих устройств на документах необходимо закодировать в двоичной системе обрабатываемую информацию. Это делается с помощью металлических чернил. Принцип работы обоих устройств основан на том, что каждому коду, прочитанному с документа, подбирается подобный из постоянно имеющихся в устройстве. После нахождения такого кода устройство выдает соответствующее количество импульсов на перфоратор. Скорость работы устройства «Станоматик» составляет 600 документов в 1 мин.; сюда входит перфорация данных.

А. В. Аваев

6737. Решение вопроса о теплопередаче в температурных зондах с помощью цифровой вычислительной машины. Кремер, Уэстуотер (Digital computer solution for heat transfer to temperature probes. Kraemer H. F., Westwater J. W.), Industr. and Engng Chem., 1954, 46, № 10, 2035—2037 (англ.)

При измерении температуры жидкости и газа зондом важную роль играют процессы теплопередачи, происходящие между средой и зондом. Величина теплопередачи зависит от размеров и формы зонда. Для элемента зонда dx, находящегося на расстоянии x от конца зонда, имеет место условие теплового равновесия

$$h_c P(T_G - T) = -ka\frac{d^2T}{dx^2} + \sigma F_A F_\varepsilon P(T^4 - T_W^4), \qquad (1)$$

связывающее теплопередачу, совершаемую конвекцией, с теплопроводностью и излучением тепла на данном элементе зонда. Переходя к новым переменным $l = x/b$, $\theta = T/T_w$ и упрощая запись коэффициентов, приводят уравнение (1) к виду

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} - \alpha(\theta^4 - 1) - \beta(\theta - \theta_G) = 0, \qquad (2)$$

в котором l изменяется в пределах от 0 до 1. Уравнение (2) можно записать в виде системы уравнений

$$d\theta/dl = p,\ dp/dl = \alpha(\theta^4 - 1) + \beta(\theta - \theta_G). \qquad (3)$$

Тепловое равновесие в зоне наконечника зонда представляется уравнением

$$h_c A_E(T_G - T_E) = -ka\left(\frac{dT}{dx}\right)_E + \sigma F_A F_\varepsilon A_E(T_E^4 - T_W^4), \qquad (4)$$

где $(dT/dx)_E$ — температурный градиент на наконечнике. Авторы предшествующих работ с целью упрощения расчетов принимали $(dT/dx)_E$ равным нулю.

Приводя уравнение (4) к обобщенным переменным и определяя температурные условия на концах зонда, авторы использовали полученные таким образом граничные условия для решения системы уравнений (3). Вычисления производились по методу Рунге—Кутта на электронной вычислительной машине ИЛЛИАК, находящейся в Иллинойсском университете. Использование вычислительного прибора дало возможность не делать упрощения задачи приравниванием $(dT/dx)_E$ нулю. Расчет температуры газа, включающий примерно 10 итераций, производился в течение около 25 сек. Точность вычислений 0,04% от абсолютной температуры.

Дополнительно авторы приводят уравнение

$$\frac{T_G - T_W}{T_E - T_W} = \left(\frac{h_c + h_R}{h_c}\right)\left(\frac{\operatorname{ch} nb'}{\operatorname{ch} nb' - 1}\right), \qquad (5)$$

где $b' = b(1+\mu)$, μ — отношение площади наконечника к площади боковой части зонда и $n = \sqrt{(h_c + h_R)P/ka}$. Вычисленные температуры газа по уравнению (5) очень хорошо согласуются с результатами решенных с помощью вычислительной машины уравнений (3).

В статье приняты обозначения: a — поперечное сечение наконечника зонда; A_E — площадь наконечника

зонда; b — длина зонда; F_A — коэффициент излучения за счет отражения тепла; F_ε — коэффициент излучения за счет выделения тепла; h_c — коэффициент передачи тепла за счет конвекции; h_R — коэффициент передачи тепла за счет излучения; k — теплопроводность зонда; P — периметр поперечного сечения наконечника зонда; T — температура зонда в точке x; T_E — температура наконечника; T_G — температура потока жидкости или газа; T_W — температура стен канала и т. п.; $\alpha = \sigma F_A F_\varepsilon P b^2 T w^3 / ka$, $\beta = h_c P b^2 / ka$, $\theta_G = \dfrac{T_G}{T_W}$, σ — постоянная Больтцмана. И. А. Ковалев

6738. Обобщение уравнений динамики сложной энергосистемы и применение электронной счетной машины для анализа устойчивости. Цукерник Л. В., Автоматика и телемеханика, 1957, **18**, № 1, 47—58 (рез. англ.)

Приводится обобщение уравнений возмущенного движения сложной энергосистемы с несколькими регулируемыми станциями при комбинированном регулировании возбуждения синхронных машин. Показан анализ устойчивости этих систем с помощью основ теории матриц, которая позволяет получить удобные алгоритмы для программирования этих задач при решении их на быстродействующих цифровых вычислительных машинах. Дана логическая схема программы для вычисления границ области устойчивости системы на машинах. В приложении дан пример составления характеристического определителя для энергосистемы, состоящей из четырех эквивалентных машин (станций), при учете автоматического регулирования возбуждения для двух из них. Указываются основные положения для программирования этой задачи и дается расчетная схема. Г. К. Кузьминок

6739. Европейский вычислительный центр научных расчетов. Же (Le centre européen de calcul scientifique. Jay Stéphane), Electro-mag., 1956, 8, № 60, 29—31 (франц.)

Вычислительный центр был создан филиалом фирмы ИБМ во Франции и оборудован вычислительной машиной ИБМ-650. В 1957 г. предполагается установка машины ИБМ-704. Приводятся характеристики машины ИБМ-650. Дана функциональная схема машины. Приводится характеристика машины ИБМ-704. Оперативное запоминающее устройство выполнено на магнитных сердечниках. Его емкость 8192 числа или команды. Время записи и выбора 12 *мсек*. Внешнее запоминающее устройство представляют собой 2 магнитных барабана, на 4096 чисел каждый, и 10 блоков магнитной ленты с общей емкостью 8 000 000 чисел. Скорость выбора и записи для магнитного барабана — 10 000 чисел в 1 сек., для магнитной ленты — 2500 чисел в 1 сек. Число представляется 35 двоичными разрядами. Машина работает с плавающей запятой. Результаты с оперативного запоминающего устройства могут передаваться либо на магнитный барабан, либо на магнитную ленту, либо на печать. Кроме того, в процессе решения ход решения задачи выдается в виде кривой на экран осциллографа. И. А. Зарубин

6740. Обзор исследований в области вычислительных машин в Манчестерском университете. Вильямс, Килберн (Aperçu des recherches sur les machines à calculer à l'Université de Manschester. Williams F. C., Kilburn T.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 101—112 (франц.)

Описывается электронная вычислительная машина Манчестерского университета, введенная в эксплуатацию в 1951 г. Ее постройке предшествовало создание трех экспериментальных машин. Аналогичные и более подробные данные о вышеуказанных машинах приведены в статьях: РЖМат, 1953, 477, 1437: 1955, 982, 983. Н. Н. Поснов

6741. Последние достижения фирмы ИБМ в области вычислительных машин (Ultimos avances de los sistemass de cálculo automático IBM. La nueva memoria magnetica IBM 305 de gran capacidad), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1955, 4, № 11, 12—17 (исп.)

Сообщается о выпуске фирмой ИБМ запоминающего устройства ИБМ-305 большой емкости с произвольной выборкой данных. Данные принимаются с перфокарт и хранятся на магнитных дисках. (См. РЖМат, 1956, 824).

Также сообщается о применении фирмой «Белл Эйркрафт» (Bell Aircraft) электронной машины ИБМ-650 в целях исследования полета самолетов на сверхзвуковых скоростях. Такую же машину устанавливает фирма «Дюпон де Немур» (E. I. du Pont de Nemours) для исследования ядерных реакций. Компания «ЭДИСОН» в Детройте собирается применить машину ИБМ-650 для подсчета электроэнергии. В ближайшие два года фирма ИБМ собирается выпустить более 500 таких машин. О. В. Бачин

6742. Роль линий связи в передаче цифровых данных. Матлак (The role of communications networks in digital data systems. Matlack R. C.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 83—86. Discuss., 86—87 (англ.)

Дальнейшая автоматизация производства и развитие вычислительной техники требуют быстрой и надежной передачи цифровых данных от различных удаленных объектов через линии связи к одному центру, при любом возможном порядке поступления. Фирма «Белл систем» (Bell System) имеет в своем распоряжении линии связи через центральные станции и линии связи непосредственные, т. е. линии для непосредственной связи двух абонентов. Количество центральных станций фирмы составляет 37 000. Количество станций непосредственной связи 42 000.

В настоящее время средняя скорость 5-дорожечного телетайпа 46,57 или 74 имп/сек, т. е. возможна передача 60,75 или 100 слов в 1 мин. (каждое слово — 5 знаков и промежуток для разделения). Надежность передачи такова, что одна ошибка приходится на 44 000 кодов. Сообщается, что фирмой «Белл систем» разрабатываются простые контрольные устройства для 5-дорожечного телетайпа. В разработке, кроме того, находятся устройство для импульсной передачи 1600 имп/сек., предназначенное для системы SAGE, и система с амплитудной модуляцией, со скоростью передачи 750 имп/сек. Фирма «Телейтайп» (Teletype Corporation) разрабатывает трансмиттер для считывания 60—100 знаков в 1 сек.

Указывается на необходимость стандартизации оборудования, стандартизации кодов и перехода на 7-дорожечные телетайпы. Подчеркивается, что наиболее вероятным способом передачи цифровых данных является передача с магнитной ленты в машину или какое-либо другое устройство. С. П. Кузнецов

6743. Работа электронных вычислительных машин с телеграфными линиями. Туп (Operation of electronic brain computers with telegraph circuits. Toop J. H.), West. Union Techn. Rev., 1956, **10**, № 4, 156—166 (англ.)

На примере машины ФЕРУТ (FERUT) излагаются принципы работы цифровых вычислительных машин. Сообщается об опыте работы машины при получении данных по телеграфу. Задачу сильно упрощало использование в машине для ввода и вывода обычного телеграфного оборудования. Программа и константы пере-

давались с помощью трансмиттера из Саскатуна и автоматически перфорировались в Торонто для получения промежуточной ленты. Непосредственный ввод данных с линии был нецелесообразен из-за разности скоростей передающего трансмиттера и оборудования ввода. Кроме того, получение промежуточных лент давало возможность исключать ошибки, вносимые телеграфной линией, путем повторения передачи и сравнения перфолент. Указывается, что для устранения подобных ошибок число передач не превосходило двух. Программа тест-задачи и ее результаты также передавались по телеграфу. Для связи в обоих направлениях использовалась одна линия. Затрагиваются вопросы повышения надежности передачи непрерывной информации путем ее преобразования в цифровой код. А. И. Щуров

6744. Измеритель отношения частот повторения двух последовательностей импульсов. Корбетт (A pulse frequency ratiometer. Corbett B. D.), Electronic Engng, 1954, 26, № 319, 412 (англ.)

Описана схема для измерения отношения частот повторения двух последовательностей импульсов. Работа схемы основана на формировании пилообразного напряжения, синхронного первой импульсной последовательности. Импульсы второй импульсной последовательности прерывают ход пилы. Это пилообразное напряжение запускает схему Шмитта, в аноде одной из ламп которой стоит миллиамперметр. Показания прибора пропорциональны отношению частот. Для формирования пилы и ее модуляции используется транзитронная схема. В. В. Карибский

6745. Коррекция импульсных систем регулирования и управления. Цыпкин Я. З., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 2, 111—125 (рез. англ.)

Статья посвящена вопросам коррекции импульсной системы регулирования или управления, при которой передаточная функция скорректированной системы будет равна желаемой. Передаточная функция системы представляется как отношение изображения ошибки к изображению внешнего воздействия.

Подробно рассмотрены два случая. Первый случай — изменение структуры линейной части системы, т. е. непрерывной коррекции. Желаемая коррекция достигается введением в линейную часть дополнительных элементов, соединенных с элементами линейной части последовательно, параллельно или в виде обратной связи. Указывается, как определить структуру и параметры дополнительных корректирующих элементов.

Второй случай изменение структуры импульсного элемента системы, т. е. импульсной коррекции. Она достигается либо путем видоизменения импульсного элемента, либо введением в качестве корректирующих элементов импульсных цепей или цифровых вычислительных устройств, которые по характеру работы эквивалентны некоторым импульсным цепям. В обоих случаях приведена методика расчета корректирующих элементов.

Приведено два примера коррекции импульсных систем. Первый пример касается непрерывной и импульсной коррекции схемы преобразователя дискретных данных в непрерывные. В качестве второго примера рассмотрена система автоматического регулирования с запаздыванием.

Дана формула передаточной функции корректирующего устройства при выбранном способе последовательной импульсной коррекции и показано, как, согласно полученным выражениям, должны соединяться усилительные элементы и элементы запаздывания для осуществления корректирующего устройства. Даны выражения, по которым определяется программа цифрового вычислительного устройства, если последнее использовано в корректирующем устройстве.

Введение импульсного корректора в виде импульсной цепи, элементов запаздывания или цифрового вычислительного устройства в непрерывную систему регулирования позволяет обеспечить оптимальный процесс с точки зрения бесконечной степени устойчивости. Библ. 12 назв. Г. К. Кузьминок

6746. Принципы построения и использования моделирующих устройств. Часть I. Основные элементы моделирующих устройств и выполняемые ими математические операции. Макдафф (Principles and design uses for analog simulators. Part I. — Analog components and mathematics. Macduff J. N.), Mach. Design, 1956, 28, № 16, 86—90 (англ.)

Первая из двух статей, посвященная описанию основных счетно-решающих элементов моделирующих устройств на постоянном токе. Указывается как на основные операции, необходимые для решения линейных дифференциальных уравнений, на суммирование, умножение на постоянный множитель и интегрирование переменных во времени. Эти операции выполняются с помощью усилителей постоянного тока с большим коэффициентом усиления. Приводятся простейшие математические соотношения, характеризующие работу решающего усилителя. Приводятся примеры решения простейших уравнений. Указывается 2 основных метода решения нелинейных задач: линеаризация исходных нелинейных зависимостей и применение нелинейных преобразователей и умножителей. В качестве устройства, используемого для умножения и функционального преобразования, описывается следящая система с линейным потенциометром для умножения и для функционального преобразования, причем в последнем случае движок потенциометра перемещается по заданному нелинейному закону. В качестве множительного устройства может быть использован электронный перемножитель.

Приводятся характеристики входных и выходных узлов моделирующих устройств. Б. Ш. Беркович

6747. Электронные вычислительные устройства. Мас Фернандес-Яньес (Calculadores electronicos. Mas Fernandez-Yañez Antonio), Metalurgía y electr., 1956, 20, № 223, 92—96 (исп.)

2-я часть статьи (часть 1 см. РЖМат, 1956, 8442).

Описывается дифференцирование и интегрирование при помощи цепочек RC, генерирование функций при помощи профилированных потенциометров. Приводятся блок-схема устройства для извлечения квадратного корня и блок-схемы двух устройств для решения квадратного уравнения. Первое устройство осуществляет нахождение корней по основной формуле, второе устройство находит корни, вычисляя значения левой части уравнения при различных x и проверяя результат на равенство нулю. О. В. Бачин

6748. Электронные генераторы функций. Венцель (Electronic function generators. Wentzel Viggo), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 123—124. Discuss., 124 (англ.; рез. франц.)

Кратко описываются два типа электронных генераторов функций: генератор функций двух переменных и генератор функций времени. Эти генераторы являются узлами моделирующего устройства EIA (Electronic Integral Analyzer), разработанного Чалмерским технологическим университетом в Швеции (Chalmers University of Technology, Sweden), которое выполняет операции типа

$$F(x) = \int_a^b K(x, t)\, f(t)\, dt$$

для следующих одно за другим значений x.

В функциональном генераторе для функций двух переменных перед экраном электроннолучевой трубки ставится транспарант с набором масок, каждая из которых представляет собой модель функций $K(x,t)$ для частного значения x. Таких масок в транспаранте помещается до 30 штук. Световое пятно на экране электроннолучевой трубки движется зигзагообразно перед маской и, проходя мимо прозрачного участка, засвечивает фотоэлемент, стоящий за ним. Таким образом, на выходе генератора функция представляется в виде серии импульсов, модулированных по длительности. Благодаря системе развертки световое пятно поочередно совершает такой зигзагообразный путь перед каждой маской. Считывание функции с одной маски производится за 75 *мсек*, а со всего транспаранта — за 3,5 сек.

Генератор функций времени $f(t)$ представляет функции в дискретном виде. Значения функций для определенных моментов времени t устанавливаются на 30 потенциометрах и затем при помощи шагового искателя подаются в соответствующей последовательности в схему моделирующего устройства. Считывание производится за 75 *мсек*. В. Д. Князев

6749. Новый электроннолучевой перемножатель с гиперболическим электростатическим полем. Гундлах (A new electron-beam multiplier with an electrostatic hyperbolic field. Gundlach F. W.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 101—103. Discuss., 103 (англ.; рез. франц.)

Берлинским технологическим институтом разработан электроннолучевой перемножатель, позволяющий перемножать величины, меняющиеся с частотой до 100 *кгц*, и пригодный для применения в моделирующих устройствах, работающих в периодическом режиме.

Перемножатель представляет собой электроннолучевую трубку с двумя парами отклоняющих электродов, действующих в направлении осей X и Y, четырьмя, отклоняющими электродами гиперболической формы и двумя приемными анодами в конце трубки, разделенными вертикальной изолирующей перегородкой. Электронный луч выходит из электронной пушки и проходит мимо вертикально отклоняющих электродов. Вертикальное отклонение луча пропорционально одной из перемножаемых величин (U_1). Затем отклоненный луч проходит через систему гиперболических отклоняющих электродов, на которые подается второе перемножаемое напряжение (U_2). В пространстве между этими электродами электростатический потенциал выражается как $u = k \cdot U_2 x \cdot y$, где x и y суть расстояния от неотклоненного луча до горизонтальной и вертикальной гиперболической пластины соответственно. От предыдущей системы луч входит с координатами $x = 0$, и y, пропорциональным U_1. В точке входа во вторую отклоняющую систему горизонтальная отклоняющая сила пропорциональна $U_2 \cdot y$. Таким образом луч отклоняется по горизонтали пропорционально произведению $U_1 \cdot U_2$.

Горизонтальное отклонение луча обнаруживается приемными анодами, которые подают сигнал на дифференциальный усилитель. С дифференциального усилителя напряжение подается на горизонтально отклоняющие электроды таким образом, чтобы привести луч к нейтральному положению. Это подаваемое на горизонтально отклоняющие электроды напряжение U_3 будет пропорционально произведению входных напряжений

$$U_3 = k \cdot U_1 \cdot U_2 \left(k = \frac{1}{20b}\right)$$

и используется как выходной сигнал перемножателя.

Вертикально отклоняющие пластины наклонены к оси для того, чтобы увеличить чувствительность и предотвратить ударение луча об их край. По этой же причине гиперболические отклоняющие электроды имеют коническую форму. Горизонтально отклоняющие электроды имеют криволинейную форму. Все три отклоняющие системы экранируются друг от друга заземленными кольцевыми экранами. Перед приемными анодами устанавливается противодинатронная сетка для улавливания вторичных электронов. Электронооптическая система построена таким образом, чтобы наиболее сфокусированный участок луча лежал бы в поле гиперболических электродов, так как это поле неоднородно и при расфокусированном луче не все его участки получили бы одинаковое отклонение.

Ток луча в трубке равен примерно 15 *мка* и ускоряющее напряжение 700 *в*. Увеличение тока луча невыгодно, так как луч «распухает» вследствие действия пространственного заряда. Механическая конструкция требует очень точного совпадения осей электронной пушки и отклоняющих электродов. Несовпадение осей вызывает нулевую ошибку, что может быть в некоторой степени компенсировано подачей постоянных напряжений на отклоняющие электроды. Нулевая ошибка может быть сведена до менее чем 0,5% от максимального значения произведения. Общая ошибка вычислений не превышает 0,5%.

В. Д. Князев

6750. Моделирующие устройства в автоматическом управлении. Миллер (Control handbook section 12. Miller J. T.), Instrum. Practice, 1956, **10**, № 2, 148—151 (англ.)

Несмотря на то, что цифровые вычислительные машины получили предпочтительное развитие по сравнению с моделирующими устройствами, в области управления и регулирования, последние также могут широко использоваться в этой области. В данной статье кратко рассматриваются вопросы применения моделирующих устройств в автоматическом управлении. Приведена блок-схема управления фрезерным станком при помощи моделирующего устройства. Дан пример использования этих устройств в качестве задержки при изучении систем регулирования. Дается сравнение моделирующих и цифровых вычислительных машин. В. М. Тарасевич

6751. Использование смешанных усилителей. Аттьюра (Consider using hybrid amplifiers. Attura George M.), Control Engng, 1956, **3**, № 5, 77—82 (англ.)

Сравниваются параметры сервоусилителей на транзисторах, электронных лампах и магнитных сердечниках. Указывается, что перечисленные типы сервоусилителей в последнее время вытесняются так называемыми смешанными усилителями (Hybrid Amplifiers.). В усилителях этого типа используются для совместной работы полупроводниковые приборы, электронные лампы и тороидальные сердечники с прямоугольной петлей. Приводятся характеристики смешанных сервоусилителей, выпускаемых промышленностью. А. И. Щуров

6752. Прибор для интегрирования уравнения Шредингера. Антонович (Przyrząd do całkowania równania Schrödingera. Antonowicz Kazimierz), Studia Soc. Sci. Torunensis, 1955, **A4**, № 1, 1—24 (польск.; рез. русск., англ.)

Прибор предназначен для интегрирования уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2^\mu}{h^2}[E - U(x)]\varphi = 0.$$

Его действие основано на математическом подобии

этого уравнения с уравнением движения магнитной стрелки (иглы) в однородном магнитном поле:

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{m}{B}[H_0 - H(t)]\,a = 0.$$

Магнитная стрелка помещается в магнитное поле, создаваемое парой специальных катушек, на каждой из которых наложено по нескольку обмоток.

Функция времени $[H(t)]$ задается с помощью одной из обмоток; питание этой обмотки снимается с потенциометра, имеющего специальное устройство для произвольного изменения выходного напряжения. Решение уравнения дается в виде кривой на экране прибора. Сравнение полученных результатов (собственных функций и собственных значений) с аналитическими расчетами показали, что погрешность составляет приблизительно 1 %, при этом бо́льшие ошибки получаются при нахождении собственных значений. А. А. Крюков

6753. Образование функций электрическими схемами с линейными элементами. Жданов Г. М., Тр. Моск. энерг. ин-та, 1956, вып. 18, 282—297

Рассматриваются электрические схемы, состоящие из линейных реостатов и постоянных сопротивлений, которые могут быть использованы для образования различных функциональных зависимостей, что достигается одновременным изменением параметров схемы.

Полученная функциональная зависимость выходного напряжения схемы сравнительно редко точно совпадает с заданной кривой, в большинстве случаев удается достичь совпадения на заданном интервале в двух или более точках.

Устройства, приблизительно образующие заданную функцию, называются линейносхемными функциональными аппроксиматорами. На примерах рассматривается выбор схемы линейными элементами по заданной функциональной зависимости, расчет параметров схемы по условию смещения кривых с последующей проверкой на «погрешность аппроксимации» в заданном интервале изменения функции. А. А. Крюков

6754. Перемножатель функций. Вейк (A function multiplier. Wyk J. D. N. van), Nature, 1956, 178, № 4544, 1247—1248 (англ.)

Описывается перемножатель двух непрерывных переменных величин, дающий на выходе также непрерывную переменную величину. Перемножатель состоит из электроннолучевой трубки 5LP5 с фосфорным экраном, обладающим малым временем послесвечения, и 4 фотоумножителей типа 931-А. Фотоумножители отделены друг от друга крестообразной перегородкой, образующей перед экраном 4 квадранта. На экран трубки подается расфокусированный луч. Отклоняющие пластины служат для луча апертурным отверстием, после которого луч имеет прямоугольное сечение, образуя на экране светящийся прямоугольник. Этот прямоугольник расположен таким образом, что освещенность фотоумножителей одинакова. При подаче на отклоняющие пластины двух перемножаемых напряжений прямоугольник смещается по оси X и Y и освещенность фотоумножителей меняется. Суммарный выход с фотоумножителей пропорционален произведению напряжений, подаваемых на отклоняющие пластины. В. Д. Князев

6755. 11-я национальная конференция Ассоциации вычислительного машиностроения в Лос-Анжелосе 27—29 августа 1956 г. Программа и краткое содержание докладов (Association for Computing Machinery 11 th National Meeting, Los Angeles, August 27 to 29, 1956. — Program, titles of papers, and abstracts), Computers and Automat., 1956, 5, № 10, 40—42, 46, 51—52, 54 (англ.)

Программа конференции включала 61 доклад, посвященный различным вопросам вычислительной техники и ее применений, а также вычислительной математике. Несколько докладов посвящено программированию. Дано краткое содержание 19 докладов. Содержание остальных докладов приведено в ноябрьском номере журнала (см. реф. 6756). Е. И. Мамонов

6756. 11-я национальная конференция Ассоциации вычислительного машиностроения в Лос-Анжелосе 27—29 августа 1956 г. Программа и краткое содержание докладов (Association for Computing Machinery, 11th National Meeting, Los Angeles, August 27 to 29, 1956. — Program, titles of papers, and abstracts. Part 2), Computers and Automat., 1956, 5, № 11, 30—35 (англ.)

Дана вторая часть программы с названиями и кратким содержанием 41 доклада, прочитанного на 11-й национальной конференции по вычислительным машинам, которая состоялась с 27 по 29 августа 1956 г. в Лос-Анжелосе (США). О. К. Щербаков

6757. Электронные вычислительные машины. Часть I. Хорн (Elektronische Rechenmaschinen. Teil 1. Horn Christian), Radio und Fernsehen, 1956, 5, № 22, 670—671 (нем.)

Популярно излагаются основные принципы построения и работы электронных цифровых вычислительных машин. Кратко рассматриваются функции основных блоков. На примерах решения степенного полинома и извлечения квадратного корня излагаются основные идеи программирования. В заключение приводятся некоторые технические данные вычислительной машины, находящейся в настоящее время в стадии окончания и сконструированной Дрезденским институтом прикладной математики Высшей технической школы (ГДР) и радиозаводом. Машина оперирует с 20-разрядными десятичными числами с фиксированной запятой, число ламп 800, полупроводниковых диодов 1000, реле 100; объем запоминающего устройства 2000 чисел, скорость работы 100 операций в 1 сек.; время сложения (вычитания) 700 *мксек*. Г. М. Грязнов

6758. Вычислительные машины непрерывного и дискретного действия. Боге (Computers, analog and digital. Boggs Albert), West. Union Techn. Rev., 1956, 10, № 4, 150—155 (англ.)

Приводятся общие рассуждения о применении вычислительных машин непрерывного действия и цифровых. В качестве примера использования машины непрерывного действия приводится пример решения задачи определения максимальной площади прямоугольной фигуры при заданном периметре. В качестве примера использования цифровой машины приводится решение квадратного уравнения. В качестве задачи, решение которой может быть выполнено машинами обеих типов, приводится вычисление дроби, числитель и знаменатель которой представляют собой многочлены по степеням переменной. Для вычисления приведенного алгебраического выражения находятся нули и полюсы. При использовании моделирующего устройства предлагается использовать логарифм этого выражения и представить логарифмы разности между корнями и выбранными значениями переменной в виде какой-либо физической величины, например в виде электрического заряда. Рассматривается применение этого метода для расчета электрических цепей, содержащих последовательно соединенные индуктивное и омическое сопротивления. В этом случае ток является функцией частоты. Для удобства все величины представляются в функции не частоты, а параметра p(полюс функции). Решение задачи представляется в графической форме. Б. Ш. Беркович

6759. О принципах универсальных цифровых вычислительных машин. Ремон (Sur les principes des calculatrices numériques universelles. Raymond F.-H.), Onde électr., 1956, **36**, № 355, 838—841 (франц.; рез. англ.)

Статья посвящена принципам действия и конструированию цифровых вычислительных машин. Освещаются вопросы представления величин в цифровых машинах, вопросы логики их построения с точки зрения булевой алгебры. Делается разграничение между цифровыми машинами, работающими в пространственно-позиционном коде (параллельного действия) и во время-импульсном коде (последовательного действия). В общих чертах описываются элементы машин как последовательного, так и параллельного действия. А. А. Крупский

6760. Вычислительные машины. Миллер (Control handbook. Section 7. Computers. Miller J. T.), Instrum. Practice, 1955, **9**, № 9, 890—894 (англ.)

Описываются основные принципы работы современных цифровых вычислительных машин. Кратко излагаются методы обработки информации. В. М. Тарасевич

6761. Электрические вычислительные машины экономят время. Магиннисс (Electronic computers — engineering timesavers. Maginniss F. J.), Gen. Electr. Rev., 1956, **59**, № 3—4, 14—17 (англ.)

Популярный очерк по истории развития и принципам действия вычислительных машин. Рассматриваются вопросы применения машин для расчета полей, конструкций, траекторий, силовых систем, а также для проведения экономических расчетов. А. И. Щуров

6762. Использование вычислительных машин в США для предсказания итогов выборов и подсчета голосов (Computer's role in U. S. election), Consult. Engr, 1956, **12**, № 12, 290 (англ.)

Сообщается об использовании вычислительной машины УНИВАК во время выборов Президента США в ноябре 1956 г. для текущего подсчета голосов в ходе выборов и предсказания результатов выборов, а также для окончательного подсчета голосов и определения результатов голосования. Для предсказания результатов выборов машина использует итоги голосования в предыдущие годы и тенденцию голосования в текущий момент. Перед вводом в машину информацию обрабатывает специальная группа, в которую входят статистики, математики, научные работники и политические обозреватели. Для поступления со всех районов страны текущей информации во время работы машины широко используется телефонная сеть и радиовещание.

Работа машины и результаты непрерывного подсчета голосов передавались по телевидению. О. К. Щербаков

6763. Механический преобразователь плоских кривых. Еремеев Н. В., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 223—233

Приводится описание созданного в 1952 г. в лаборатории кафедры прикладной механики МГУ механического преобразователя плоских кривых. Весьма простой по своему устройству прибор позволяет по заданному уравнению строить семейства кривых (зависящих от 2 параметров) одновременно в декартовой и полярной системах координат. С помощью этого прибора можно, следовательно, осуществлять прямое и обратное преобразование кривых, заданных в декартовой системе координат, в семейства кривых, определенных в полярной системе координат. В качестве примеров преобразований, выполняемых прибором, рассматриваются преобразование прямой в спираль Архимеда, косинусоиды — в кардиоиду и серии конгруэнтных секансоид — в серию конхоид. Указывается, что практическим применением прибора является вычерчивание различных плоских кривых, имеющих сложную конфигурацию. Так, для вычерчивания различных спиралей Архимеда, синусоид (косинусоид), улиток Паскаля и конхоид в качестве исходной кривой для последующих преобразований достаточно иметь только одну единственную прямую. Отмечается, что с помощью прибора легко и более точно, чем при известном построении кривых по точкам, может быть вычерчена какая-либо одна кривая сложной конфигурации. В весьма короткий срок (за несколько минут) можно вычертить целую серию кривых одного и того же семейства путем изменения параметров этого семейства, осуществляемого механическим способом. В качестве исходной кривой может быть взята любая плоская кривая, будь то кривая, представляющая собой график зависимости, найденной в результате решения некоторой математической задачи, либо кривая, вычерченная пером регистрирующего прибора и дающая графическое изображение протекания некоторого физического процесса. В последнем случае прибор может оказаться полезным при анализе зависимости, найденной из эксперимента. Для быстрого получения с помощью прибора целой серии кривых семейства, к которому принадлежит экспериментальная кривая, не требуется отыскания аналитического выражения для изображаемой ею зависимости. Особо рассматривается вопрос о применении прибора в конструкторской практике для механизации проектирования кулачковых механизмов как аксиальных, так и с заданным значением дезаксиала. Указывается, что прибор успешно решает задачу и кинематического, и динамического проектирования кулачковых механизмов. Г. М. Грязнов

6764. П. Счетная линейка для операций с векторами. Харнуэлл (Vector calculating rule. Harnwell Gaylord P.) [United States of America as represented by the Secretary of the Nary]. Пат. США 2703677, кл. 235 — 61, 8. 03. 55

Описывается прибор, с помощью которого можно определять расстояние между двумя движущимися точками в любой определенный момент времени, оценивать изменения этих расстояний, находить векторы скорости точек и угол между этими векторами. Прибор состоит из диска, по окружности которого равномерно нанесено 360 делений. На диске начерчен круг, также разделенный на 360 частей.

Центры этих кругов соответствуют двум точкам, относительное движение которых изучается. Расстояние между центрами этих кругов представляет собой вектор скорости одной из точек, радиус второй окружности равен вектору скорости другой точки. Центр первой окружности является центром вращения прозрачной пластинки. Через центр пластинки проходит движок, на котором нанесена логарифмическая шкала. Движок, пересекая шкалу, нанесенную на окружность диска, указывает величину и направление относительной скорости указанных точек. На пластинке имеется кривая для отсчета расстояния между двумя данными точками и угла между направлениями их движения. Шкала расстояний свободно вращается вокруг точки, являющейся центром второй окружности, и пересечением с этой кривой указывает расстояние между точками и угол между направлениями движения. Прибор сконструирован для определения относительного положения подводной лодкой и цели. Е. В. Вандышева

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

6765. Многостаночная работа. Кнёдель (Mehrplatzarbeit. Knödel W.), MTW-Mitt., 1956, **3**, № 1, 26—27 (нем.)

Указывается, что в настоящее время значительное число применяемых в промышленности различных машин и станков работает полностью автоматически и лишь время от времени требует надзора и обслуживания. Отсюда естественно стремление поручить обслуживание нескольких однотипных машин или станков одному человеку. Вопрос о рациональном (с экономической точки зрения) выборе числа станков, обслуживаемых одним рабочим, может быть разрешен более эффективно, вместо проведения дорогостоящих экспериментов, с помощью методов теории вероятности. Привлечение этого аппарата оправдывается тем, что нельзя точно предсказать момент, когда тому или иному станку потребуется вмешательство со стороны человека, и можно лишь указать вероятность того, что определенный станок в заданном интервале времени потребует обслуживания. Очень кратко рассматриваются 2 метода проведения необходимых расчетов для определения количества персонала, потребного для обслуживания заданного числа станков.

Г. М. Грязнов

6766. Применение вычислительных машин при производстве абразивов (Computing mix proportions automatically), Automation, 1956, **3**, № 10, 62 (англ.)

Сообщение о применении вычислительной машины КПК (CPC) фирмы ИБМ в производстве абразивных кругов. Рецептура и другие исходные данные вводятся с перфокарт. Результаты печатаются и используются в производственном процессе. Вычислительное оборудование имеет телеграфную связь с отделениями фирмы в других городах. Получаемые по телеграфу данные набиваются на перфоленте, а затем переносятся на перфокарты и вводятся в машину.

А. И. Щуров

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абдуллаев Т. Г. 6441 К
Айзенштат Н. Д. 6722
Александров А. Д. (ред.) 6087 К
Александров П. С. 6223, 6224
Аленицын Ю. Е. 6290
Альанчий С. 6454
Андрунакиевич В. А. 6191
Аржаных И. С. 6399
Артоболевский И. И. 6591

Б

Бабакова О. И. 6299
Бакельман И. Я. 6671, 6677
Басов В. П. 6341, 6344
Березин Ф. А. 6490
Берман Д. Л. 6275, 6276
Большев Л. Н. 6723
Бокштейн М. Ф. 6226

В

Вайнштейн И. А. 6722
Вильнер И. А. 6721
Виноград Р. Э. 6355
Ворович И. И. 6398
Вркоч И. 6352
Выханду Л. 6717

Г

Гельфанд И. М. 6467
Гриб А. А. 6384
Гринцевичюс К. И. 6625, 6626
Гуань Цзи-вэнь 6181
Гуань Чжао-чжи 6068

Д

Дзядык В. К. 6260
Дивеев Р. Х. 6532

Е

Егорова И. А. 6367 К
Еремеев Н. В. 6763
Еремин С. А. 6286, 6323

Ж

Жданов Г. М. 6753
Железина И. И. 6665

З

Завьялов Ю. С. 6405
Задирака К. В. 6682
Золин А. Ф. 6279
Зубов В. И. 6354
Зуховицкий С. И. (Зуховицький С. І.) 6494, 6660

И

Иванов В. В. 6718
Иванов В. К. 6376, 6377
Ивлев В. С. 6075
Иидзима 6421
Ильин В. А. 6451

К

Каган В. Ф. 6599 К
Кадец М. И. 6477
Казакевич В. В. 6403
Камышко И. А. 6428 К
Карамата Й. 6454
Кардашевский К. М. 6706
Кащеев Н. А. 6681
Клосс Б. М. 6513
Коваль П. Й. 6687
Колмогоров А. Н. (ред.) 6087 К
Кошелев А. И. 6378
Красносельский М. А. 6365
Крейн С. Г. 6365
Крейнес М. А. 6722
Кузнецов В. Т. 6099

Л

Лаврентьев М. А. 6087 К
Лайтох М. 6360
Лаптев Г. Ф. 6642
Лейдерман Ю. Р. 6711
Либер А. Е. 6629
Ли Ди 6096
Ли Ен Пир 6292
Лось Г. 6164

М

Макаров Ф. П. 6414
Максимов Ю. Д. 6293
Малышев А. В. 6125
Мамедов Р. Г. 6274
Манин Ю. И. 6128
Маркосян С. А. 6345
Маслов В. П. 6364
Мацумото 6095
Мельников Г. И. 6338
Мергелян С. Н. 6374
Микусинский Я. 6464, 6502
Минц Р. М. 6357
Миракьян Г. М. 6280
Морев И. А. 6327
Мори 6317
Моригути 6697
Морозов М. И. 6277
Москвичев А. Д. 6382
Мочульский Е. Н. 6202
Мрувка С. 6211, 6212, 6215
Муравьев П. А. 6336
Мусина С. С. 6693
Мчедлишвили Е. 6574

Н

Наймарк М. А. 6487
Никольский В. Н. 6493
Никольский С. М. 6261, 6262, 6263, 6264
Норден А. П. 6622 К

О

Окильевий Б. 6339

П

Пензов Ю. Е. 6634
Персидский К. П. 6370
Персидский С. К. 6353
Пинскер А. Г. 6496
Погорелов А. В. 6624 К
Полозков А. П. 6440 К
Прекопа А. 6509
Прудников В. Е. 6100

Р

Рапопорт И. М. 6342
Ремез Е. Я. 6278
Реньи А. 6509
Решетняк Ю. Г. 6678
Розенфельд Б. А. 6631, 6632
Романовский В. И. 6560
Романовский П. И. 6424 К
Рубинштейн Г. Ш. 6469
Рыбаков В. Н. 6618

С

Салехов Д. В. 6476
Самокиш Б. А. 6495
Самуэль О. И. 6335
Сарманов О. В. 6518
Сато 6294
Сикорский Р. 6218
Смирнов С. В. 6334
Смирнов Ю. М. 6245 Д
Соболев С. Л. 6694
Соболевский П. Е. 6365
Солнцева Т. В. 6595, 6596
Соломяк М. З. 6475
Стечкин С. Б. 6494
Стрельцов В. В. 6672
Су Бу-цин 6635
Суворов Г. Д. 6288
Сутюшева Ш. Ш. 6686

Т

Тагамлицки Я. 6429 К
Тайманов А. Д. 6225
Талепоровский А. М. 6597
Тамакава 6170
Тиман А. Ф. 6258
Трачик Т. 6218

У

Урабник К. 6509

Ф

Фалевич Б. Я. 6251
Филянская Е. П. 6394
Фишман К. М. 6284
Фролов Н. А. 6430 К

Х

Хапланов М. Г. 6285
Хведелидзе Б. В. 6295
Хитоцумацу 6321
Ходова Р. Н. 6593
Ху Ши-хуа 6108

Ц

Цай А. Г. 6397
Цукерник Л. В. 6738
Цыганков И. В. 6615
Цыпкин Я. З. 6745

Ч

Чарин В. С. 6165
Чечик В. А. 6340
Чернышенко В. М. 6627
Чжэн Цзянь-цзе 6450
Чикин Л. А. 6298

Ш

Шабат Б. В. 6325
Ши Гуан 6369 Д
Шилов Г. Э. 6504
Широков П. А. 6636
Ширшов А. И. 6199
Школьник А. Г. 6439 К
Шлионский Г. Г. 6291
Шумов А. С. 6329 К

Я

Янекоски В. 6576
Яглом И. М. 6579 К
Якубович В. А. 6350
Ямадзаки 6228
Ясуда 6426 К

A

Abhyankar S. 6182
Afriat S. N. 6153, 6333
Aitken A. 6159 К
Akutowicz E. J. 6309
Albuquerque J. 6497
Alcaide Inchausti A. 6569
Alguneid A. R. 6662
Amato V. 6343
Amsler M-H. 6614
Anderson O. 6529
Andreoli G. 6205, 6666
Anis A. A. 6520
Antonowicz K. 6752
Aoyama H. 6544
Arens R. 6194
Arghiriade E. 6607
Attura G. M. 6751
Auslander L. 6648
Aymerich G. 6386—6388

B

Bagemihl F. 6304
Bal L. 6724
Baldassarri M. 6613 К
Balsimelli P. 6651
Barocio S. 6346
Baron R. 6097
Bartholomay A. F. 6229
Bartsch W. 6091 К
Basilevich V. 6395
Bassali W. A. 6400
Bauer H. 6213
Bauer W. F. 6734
Baumgartner R. A. 6083
Behnke H. 6078
Behrens E. A. 6198
Belgodère P. 6086
Bellman R. 6119, 6150, 6514, 6551
Bennett J. H. 6563
Bentley R. L. 6733
Berg L. 6695, 6696
Bergman S. 6685
Bers L. 6383
Bhattacharya B. 6281
Bierlein D. 6550
Biguenet A. 6085
Blij F. van der 6146
Block H. D. 6491
Boggs A. 6758
Bompiani E. 6667
Bonati Savorgnan C. 6417
Boulanger G. R. 6730
Bourbaki N. 6507 К
Bourgin D. G. 6222
Bram J. 6486
Brand L. 6425 К
Brelot M. 6375
Briggs W. E. 6121
Brinis E. 6655
Brown E. F. 6082
Brown L. M. 6575
Brunk H. D. 6259
Bruno R. 6606
Brzoska F. 6091 К
Bucur I. 6650
Burgess C. E. 6220
Buseman H. 6668 К

C

Cafiero F. 6246
Cahn C. R. 6714
Călugăreanu G. 6436 К
Carathéodory C. 6088 К, 6089 К
Carlitz L. 6117, 6131, 6167
Cartan H. 6234—6237
Cesari L. 6267 К
Chakravarty N. K. 6463
Chakravorty J. G. 6396
Châtelet A. 6209 К
Châtelet F. 6604
Chern Shiing—shen 6320, 6649
Clenshaw C. W. 6679
Clunie J. 6306
Cohen E. 6130
Cohn H. 6124
Combes B. 6523
Conkwright N. B. 6152
Corbett B. D. 6744
Corduneanu C. 6690
Cowling V. F. 6283
Cox C. P. 6534
Crandall S. H. 6692
Curtis H. J. 6077

D

Dall Àglio G. 6423
Dalla Volta V. 6633
Dantzig D. van 6410
Dantzig G. B. 6555
Darwin J. H. 6542
David M. 6140
Davidson D. 6553
Davis P. 6707
Dawoud R. H. 6400
Deaux R. 6594
Dehame M. E. 6160
Delachet A. 6431 К, 6433 К
De Munter P. 6548
Desforge J. 6078
Diamond J. M. 6735
Dieulefait C. E. 6452
Djerasimović B. 6133
Dobrzycki S. 6416
Doetsch G. 6465 К
Dolph C. L. 6390
Douglas J., Jr 6688
Douglis A. 6372
Dunin-Barkovski I. V. 6572 К, 6573 К
Duren W. L., Jr 6084

E

Eberlein W. F. 6483
Eisenhart L. P. 6643
Ellis H. W. 6474
Epstein L. F. 6459
Erdélyi A. 6466 К
Ewing G. M. 6259

F

Fabricius-Bjerre Fr. 6664
Fadini A. 6605
Fano G. 6603
Farinha J. 6149
Faure R. 6392
Federighi U. 6437 К
Ferguson A. R. 6555
Fichera G. 6401
Flett T. M. 6273
Foiaş C. 6371
Follin J. W., Jr 6539
Fortet R. 6521
Fox G. E. 6247
Fox L. 6680
Frank E. 6455
Frankel S. P. 6691
Freire R. 6566
Freitas A. César de 6503
French N. E. 6459
Frenkiel F. N. 6539
Fribourg 6188
Fulton C. M. 6630

G

Gabriel R. F. 6332 Д
Garabedian P. R. 6380, 6683
Garrott P. B. 6736
Gehring A. J. 6727
Geisser S. 6530
Georges J. S. 6432 К
Genovese C. 6608
Gergely E. 6724
Gheorghiev C.h. 6616
Ghika Al. 6468
Giannarelli R 6080
Gibson W. A. 6570
Gillings R. J. 6094
Gillis J. 6510
Gini C. 6538
Giuliano L. 6437 К
Gleason A. M. 6200
Godeaux L. 6600, 6601, 6619, 6620, 6621
Goetz A. 6499
Gołąb S. 6583 К
Goldbeck B. T., Jr 6413
Goldie A. W. 6190
Gonshor H. 6488
González de la Funete C. 6101
Grau A. A. 6413
Green J. A. 6161
Green J. W. 6373
Greppi H. 6703
Grove E. L. 6148 К
Guest J. 6710
Guilbaud G. Th. 6073
Guitel G. 6109
Gundlach F. W. 6749
Gupta H. 6115
Gussi G. 6371

H

Halberg C. J. A., Jr 6478
Hällström G 6252
Harary F. 6210
Harnwell G. P. 6764 П
Hartman S. 6499
Haupt O. 6434 К
Hayashi K. 6337
Heins M. 6305, 6316
Herstein I. N. 6189
Heyvaert A. C. 6556
Hille E. 6363
Hillman A. P. 6157
Hodges J. H. 6116
Hoffman K. 6194
Hofmann L. 6549
Hörmander L. 6312
Horn C. 6757
Hsiang Fu Cheng 6269
Hurt A. 6556

I

Ionescu D. V. 6436 К, 6704
Ionescu Gh. 6724
Isaac E. J. 6558
Isbell J. R. 6552
Iséki K. 6171, 6177
Ishihara S. 6637
Iyer V. G. 6311

J

Jacobsthal E. 6674
Jakobs K. 6500
James G. S. 6533
James I. M. 6231
Jarník V. 6069
Jay S. 6739
Jeśmanowicz L. 6139
Johansson I. 6110
Jones A. 6193
Jørgensen V. 6315
Juhos B. 6524
Jurkat W. B. 6422

K

Kakar A. G. 6162
Kakutani S. 6282
Kanwal R. P. 6404
Kaplan W. 6356
Kappos D. A. 6522
Kasriel R. H. 6221
Kastenbaum M. A. 6531
Kato T. 6492
Kautny W. 6590
Kawata T. 6512
Kelso J. M. 6702
Kepler J. 6105 К
Kilburn T. 6740
Kimura N. 6173
Kinney J. M. 6432 К
Kjellberg Bo 6420
Kleiner W. 6287
Klingen H. 6322
Knödel W. 6765
Kofler E. 6106 К
Kohls C. W 6192
Koksma J. F. 6123
Kolchin E. R. 6207
Korhammer A. 6715
Koshti M. E. 6457, 6458
Kraemer H. F. 6737
Krishnan V. S. 6214
Krivoshein N. 6700
Krygowska Z. 6578
Kubo T. 6314
Kuh E. 6535
Kurepa D. 6661
Kurosh A. G. 6179 К

L

Laha R. G. 6527
Landsberg M. 6470
Lang S. 6166
Laurent A. G. 6541
Laville G. 6708
Leglanc L. 6247
Legrand G. 6657
Lehmann N. J. 6361
Leja F. 6438 К
Lekkerkerker C. G. 6134, 6135
Lenz H. 6588, 6673
Lesky P. 6684
Leti G. 6647
Levin F. 6208
Levinson N. 6120
Libermann P. 6654
Libois P. 6582 К
Liguori F. 6090 К
Lindelöf E. 6427 К
Lipiński J. S. 6257
Liserre G. O. G. 6543
Locher-Ernst L. 6113
Lohwater A. J. 6303
Lokki O. 6098
Lorent H. 6586
Lós J. 6164
Lukacs E. 6307
Lumer G. 6193
Luxemburg W. A. J. 6248

M

Maass H. 6324
Macauley R. A. 6180 Д
Macduff J. N. 6746
McManus M. 6557
Maginniss F. J. 6761
Mansoor Ahmad 6308
Marchionna E. 6602, 6612
Margaritis E. D. 6562
Mařík J. 6250
Marković Ž. 6435 К
Markus L. 6648
Markuschewitsch A. I. 6331 К
Marschak J. 6567
Martin A. D. 6406
Martin W. T. 6320
Mas Fernandez-Yañez A. 6747
Massera J. L. 6348
Matlack R. C. 6742
Matsumura H. 6206
Matusita K. 6546
Mauersberger P. 6705
Maurer I. 6163
Medlin G. W. 6154
Meidell B. 6564
Meixner J. 6720
Meksyn D. 6699
Mendelson M. J. 6726
Menger K. 6076, 6077
Métral P. 6169
Meyer J. R. 6535
Meyer-König W. 6446
Meyer zur Capellen W. 671 9
Mikusiński J. 6464

Miller G. A. 6070, 6071
Miller J. T. 6732, 6750, 6760
Mişculescu D. 6598 К
Misonou Y. 6489
Mitrinovitch D. S. 6144
Mizohata S. 6351
Miyadera I. 6501
Mohanty R. 6271
Monna A. F. 6472, 6473
Montel P. 6415
Moore J. C. 6232, 6233, 6239, 6240, 6242, 6243
Moran P. A. P. 6561
Morgenstern D. 6709
Mori S. 6318
Morita K. 6219
Morse M. 6255
Moser L. 6460
Mrówka S. 6211, 6212, 6215
Muto Y. 6639
Muracchini L. 6658
Myrberg P. J. 6319

N

Naess A. 6580 К
Nagabhushanam K. 6515
Nagata M. 6611
Naiman M. 6729
Nakano H. 6216
Nakano N. 6187
Nanda M. 6271
Narain R. D. 6547
Nasu Y. 6640, 6641
Neville E. H. 6587
Nicoară G. 6598 К
Nikodým O. M. 6249
Nishimura H. 6659
Nöbeling G. 6213
Nordbotten S. 6554
Norden A. P. 6623 К
Numakura K. 6195

O

Obata M. 6637
Ota M. 6318
Otsuki T. 6638

P

Palaj C. 6628
Páter Z. 6328
Patterson E. M. 6196, 6197
Pauc C. 6256
Peaceman D. W. 6689
Péter R. 6093 К
Peters A. 6584
Petersen G. M. 6448
Petrowski I. G. 6385 К
Pham Mau Quan 6646
Pham Tan Hoang 6645
Picone M. 6300, 6407
Pignedoli A. 6402, 6443 К
Pini B. 6381
Pipping N. 6137
Pisot Ch. 6127
Poenaru V. 6371
Pogorzelski W. 6296, 6297, 6444 К
Pokorná O. 6151
Porter V. J. 6729
Prékopa A. 6526 Д
Preston G. B. 6172, 6203, 6204
Privalov I. I. 6330 К
Půst L. 6368 К
Putnam C. R. 6484

Q

Quadros e Costa J. M. 6418
Quilghini D. 6391

R

Rabinowitz P. 6707
Rachford H. H., Jr 6689
Rado F. 6724
Ramanujan M. S. 6449
Ravetz J. R. 6505
Raymond F.-H. 6759
Reade M. O. 6326
Rechard O. W. 6498
Redheffer R. 6349
Rembs E. 6669, 6670
Renggli H. 6289
Rham G. de 6102
Richert H.-E. 6145
Riesz F. 6508 К
Riguet J. 6111
Robertson H. H. 6680
Robertson J. E. 6731
Rodríguez Sanjuán A. 6453
Rogers H., Jr 6079
Rojas Lagarde A. 6389
Roman T. 6442 К
Rosenbloom P. C. 6491
Roy S. N. 6531, 6537
Rubin H. 6393
Rudin W. 6301
Rund H. 6589
Rusu E. 6132

S

Saban G. 6617
Šafarevič I. R. (Schafarewitsch J. R.) 6158К, 6186
Sagastume-Berra A. E. 6178
Saito T. 6347
Salzer H. E. 6698
Sawyer D. B. 6675
Schinzel A. 6142, 6143
Schirmer H. 6227
Schneider E. 6092 К
Schouten J. A. 6656
Schultz-Grunow F. 6379
Schützenberger M. P. 6174
Schwartz L. 6506 К
Searle S. R. 6528
Segre B. 6609, 6010
Serre J. P. 6241
Shapiro H. S. 6313
Sierpiński W. 6138, 6141
Sikorski R. 6218
Silverman E. 6265
Silvey S. D. 6516
Singbal B. N 6409
Singh B. 6270
Singh S. K. 6310
Skudziński M. 6577
Slater L. J. 6456
Smirnov N. V. 6572 К, 6573 К
Smith B. K. 6728
Smith S. E. 6729
Soddy F. 6725 К
Spampinato N. 6663
Srivastava O. P. 6126
Stein P. 6701
Steinberg R. 6168
Steinhaus H. 6499, 6519
Steriotis P. J. 6565
Stoker J. J. 6366
Storch J. M. 6568
Stowe L. W. 6727
Strauss M. 6201
Sundrum R. M. 6545
Sunouchi G. 6268
Suppes P. 6393, 6553
Szász G. 6217
Sz. Nagy B. 6508 К

T

Takasu T. 6592
Takeno H. 6644
Tamura T. 6173, 6176
Tanabe H. 6479
Tandori K. 6254
Tatarkiewicz K. 6358, 6359
Taton R. 6107 К
Taussky O. 6156
Tautz G. L. 6480
Taylor A. E. 6478
Terneu R. 6074
Theodorakis G. 6536
Thom R. 6238
Thompson H. R. 6712
Tiwari S. Y. 6281
Tondl A. 6368 К
Toop J. H. 6743
Torroja J. M. 6713
Tortrat A. 6462 Д, 6511
Transue W. 6255
Traczyk T. 6218
Tsao C. K. 6540
Turnbull H. W. 6104
Turowicz A. 6122

U

Utz W. R. 6259, 6362

V

Vajda S. 6559
Vandiver H. S. 6185
Vázsonyi A. 6072
Veldkamp G. R. 6585
Velte W. 6408
Venkataraman L. V. 6118
Vesentini E. 6652
Vidav I. 6482
Vidyasagar G. C. 6461
Vincze I. 6412
Vinogradov I. M. 6147 К
Viola T. 6253
Vučković V. 6411, 6447
Výborný R. 6471

W

Wada H. 6230
Wall H. S. 6136
Wallace A. D. 6175
Wansink J. H. 6081
Weaver M. W. 6185
Wentzel V. 6748
Westwater J. W. 6737
Whaples G. 6183, 6184
Wiener N. 6485
Wilansky A. 6155
Willcox A. B. 6481
Williams D. C. 6525
Williams F. C. 6740
Willmore T. J. 6653
Wilson L. D. 6727
Wilson W. 6103
Wintner A. 6676
Witte A. J. J. de 6112
Wright E. M. 6114
Wuyts P. 6302
Wyk J. D. N. van 6754
Wyman M. 6460

Y

Yamamoto K. 6129
Yano K. 6656
Yano S. 6272

Z

Zaanen A. C. 6266
Zariski O. 6320
Zawrosky A. 6419
Zeller K. 6445, 6446
Zoroa Terol P. 6517

一松隽 6321
佐藤榮義 6294
安田秀雄 6426 К
山崎圭次郎 6228
李迪 6096
松本清次郎 6095
森口繁一 6697
森明 6317
玉河恒夫 6170
管紀文 6181
胡世華 6108
蘇步青 6635
鄭鑑杰 6450
關肇直 6068
飯島泰蔵 6421
리영필 6292

Технический редактор *Р. М. Денисова*